LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

# LE POUVOIR SÉPARATEUR DES INSTRUMENTS ASTRONOMIQUES D'OBSERVATION, TRAITÉ PAR L'ANALYSE DE FOURIER

Par L. BERGER.

**Sommaire.** — La théorie classique du pouvoir séparateur des instruments (Foucault, Airy) ou, si l'on préfère, la théorie moderne de la formation des images (Duffieux), posent des limites bien connues aux performances séparatrices des instruments d'observation. Cependant, des hypothèses fortement restrictives sont faites, dans toutes ces théories, au sujet de la constitution des instruments d'optique envisagés (instrument bâti selon le schéma classique de l'objectif focalisateur, faible ouverture relative de cet objectif).

Dans le présent travail, une théorie rigoureuse du « pouvoir séparateur » est exposée, qui réduit ces hypothèses de structure au strict minimum, et qui atteint ainsi une extrême généralité. Si l'on suppose la transformation de Fourier appliquée à la distribution de la brillance sur l'objet, cette théorie nous indique, de manière simple, quelles composantes de Fourier un instrument donné pourra nous faire connaître.

1. **Introduction**. — Le rôle des *instruments astronomiques d'observation* est, par définition, de nous faire connaître la forme et la disposition des astres brillants placés sur la sphère céleste.

Ainsi que je le montrerai, l'analyse harmonique de Fourier est avantageuse quand il s'agit d'étudier le « pouvoir séparateur » de ces instruments et d'arriver à des conclusions d'une portée très générale.

La présente méthode semble atteindre n'importe quel instrument astronomique d'observation, quelle qu'en puisse être la structure. A ce point de vue, elle est plus générale que la méthode bien connue de Duffieux; elle donne des résultats moins complets. Son but est de limiter *a priori*, et de manière simple et rigoureuse, les renseignements que peut fournir un instrument d'observation.

2. **Définitions générales**. — Repérons les points de la sphère céleste à l'aide d'un système de coordonnées commode.

Si nous nous bornons à une petite portion de la sphère céleste, ne dépassant pas cinq degrés sur cinq degrés, nous pourrons y définir des coordonnées $x_1$, $y_1$, approximativement cartésiennes. Un exemple est celui des coordonnées célestes équatoriales (sphériques), pour une petite portion du ciel à cheval sur l'équateur céleste.

Étudions les phénomènes en lumière monochromatique, de fréquence $\nu$ et de longueur d'onde $\lambda$.

Soit $C_1$ le nombre complexe qui est la *densité de source* au point $P_1$ ($x_1$, $y_1$) placé sur la sphère céleste. Cette densité de source est telle que $C_1\,dS_1$ représente par son module et son argument l'amplitude et la phase de la source de lumière (émise ou diffusée) qui occupe le petit élément de surface $dS_1$ autour du point $P_1$ ($x_1$, $y_1$).

On peut mettre en évidence la *densité d'amplitude* $E_1$ et la phase $\varphi_1$ de la lumière

$$C_1 = E_1\, e^{i\varphi_1}; \tag{1}$$

$E_1$ et $\varphi_1$ sont des nombres réels. Nous appelons $e^{i\varphi_1}$ la *fonction de phase*.

Comme la lumière est monochromatique, $E_1$ est indépendant du temps $t$ et $\varphi_1$ varie linéairement en fonction du temps.

Remarquons pour la suite que $E_1^2$ est tout simplement la brillance au point $P_1$.

Dans le cas de lumière émise, ou de lumière diffusée par un corps qui est éclairé par une source étendue (Soleil), on sait que les $C_1$ en deux points, même très voisins, de la sphère céleste, sont *incohérents*. Ce mot signifie qu'à tout instant donné la phase $\varphi_1$ varie d'un point à un autre tout à fait au hasard, et de manière presque discontinue; l'image du nombre complexe $e^{i\varphi_1}$ est sur le cercle trigonométrique exac-

tement comme la bille du jeu de roulette pour différents tirages successifs. En outre, pour des fréquences $\nu$ même très voisines, $\varphi_1$ a aussi des valeurs complètement incorrélées.

La connaissance de la phase $\varphi_1$ en fonction de $x_1$ et de $y_1$ ne présente aucun intérêt; la phase $\varphi_1$ ne fournit aucun renseignement sur la structure des astres qui émettent la lumière ou la diffusent.

Par contre, tant que l'on reste à l'échelle humaine, ou à l'échelle astronomique, l'amplitude $E_1$ (ou la brillance $E_1^2$) varie d'une manière plus régulière en fonction de $x_1$ et $y_1$, et en fonction de la fréquence $\nu$, et nous fournit beaucoup de renseignements au sujet de la structure géométrique et physique des astres. Le rôle des instruments astronomiques d'observation est de nous faire connaître la brillance $E_1^2$ en fonction de $x_1$ et de $y_1$.

Aucun appareil optique ne reçoit de la lumière d'une seule et unique fréquence $\nu$. Nous ferons une théorie presque monochromatique; il faut alors caractériser l'émission de lumière, par les sources célestes, par :

*a.* La distribution $E_1^2(x_1)$, qui est pratiquement la même pour toutes les fréquences du petit intervalle spectral $\Delta\nu$;

*b.* Pour chaque fréquence de lumière de l'intervalle $\Delta\nu$, la distribution de phase correspondante $\varphi_1(x_1)$.

3. **Réduction à une seule dimension.** — La brillance $E_1^2$ est une fonction de deux variables $x_1$, $y_1$ Cependant, dans un but de simplification de l'exposé, nous considérerons dans toute la suite $E_1^2$ comme une fonction d'une seule variable $x_1$, comme si les astres, tels qu'ils se peignent sur la sphère céleste, n'avaient qu'une dimension et non deux. Que l'on soit cependant bien persuadé que tous les théorèmes énoncés dans la suite s'étendent très facilement et sans modification profonde au cas de deux dimensions.

4. **Théorie de Fourier des répartitions de brillance. Le théorème de la borne supérieure.** — Soit une fonction $y = y(x)$ de la variable $x$; cette fonction $y$ peut, par exemple, être la brillance $E_1^2(x_1)$ sur la sphère céleste, ou l'éclairement sur une image. L'échelle des détails (de l'ordre de la seconde d'arc), qui nous intéressent dans la répartition des valeurs de la fonction $y(x)$, est toujours très petite par rapport à l'intervalle total de cinq degrés (égale 18 000 secondes d'arc) que nous prenons sur la sphère céleste; nous pouvons donc considérer cet intervalle de cinq degrés comme pratiquement infini.

Sous certaines conditions de régularité de $y = y(x)$ on pourra alors définir, par la formule suivante, la *transformée de Fourier* $A = A(\Omega)$ de cette fonction $y$

$$A(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(x)\, e^{-i\Omega x}\, dx. \qquad (2)$$

On sait alors que l'on a en retour

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\Omega)\, e^{i\Omega x}\, d\Omega. \qquad (3)$$

La grandeur $\frac{\Omega}{2\pi}$ joue tout à fait le rôle d'une fréquence de vibration sinusoïdale, quoique l'unité avec laquelle elle s'exprime soit le (radian)$^{-1}$. Aussi l'appellerons-nous *fréquence d'image*. $\Omega$ est la *pulsation d'image*. Pour chaque valeur de $\Omega$, la valeur de A correspondante est l'*amplitude de Fourier*. On voit que l'on peut remplacer la considération de $y(x)$ par celle de sa t. F. $A(\Omega)$; c'est ce que l'on fait en Optique pour l'onde lumineuse, et en Acoustique pour l'onde sonore. Nous ferons ainsi pour la distribution de brillance $E_1^2(x_1)$. $A(\Omega)$ représentera désormais la distribution des amplitudes de Fourier de $E_2^1(x_1)$ pour les diverses pulsations d'image.

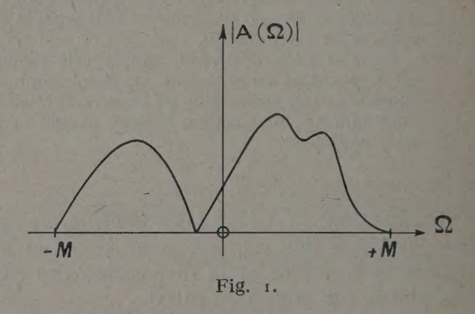



Fig. 1.

Donnons ce que nous appellerons le *théorème de la borne supérieure*, qui est un pur théorème de mathématiques; il nous sera utile dans la suite.

Supposons que les pulsations d'image $\Omega$ supérieures en valeur absolue à un nombre $M$ soient absentes de la t. F. de $y(x)$, aient une amplitude $A(\Omega)$ nulle

$$A(\Omega) = 0 \qquad \text{pour} \quad |\Omega| > M.$$

Nous dirons alors que $y(x)$ est *à t. F. limitée* (*fig.* 1); sa t. F. admet la limite $M$; (3) donne alors

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (i)^n \int_{-M}^{+M} A(\Omega)\,\Omega^n\, e^{i\Omega x}\, d\Omega,$$

$$\left|\frac{d^n y}{dx^n}\right| \leq \int_{-M}^{+M} |A(\Omega)|\, M^n\, d\Omega.$$

Or (2) donne

$$|A(\Omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |y(x)|\, dx,$$

d'où

$$\left|\frac{d^n y}{dx^n}\right| \leq 2M^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} |y(x)|\, dx \qquad (4)$$

(théorème de la borne supérieure).

On voit donc que, à norme donnée pour $y(x)$, plus la fonction $y(x)$ est à t. F. limitée, et plus elle devra présenter de contours arrondis. Les « petits détails », les variations brusques, y manqueront. On verra l'intérêt de cela au paragraphe 7.

**5. Définition de la prise primaire. La formule fondamentale et les hypothèses fondamentales. Le théorème fondamental.** — Passons maintenant à la considération des instruments astronomiques d'observation eux-mêmes.

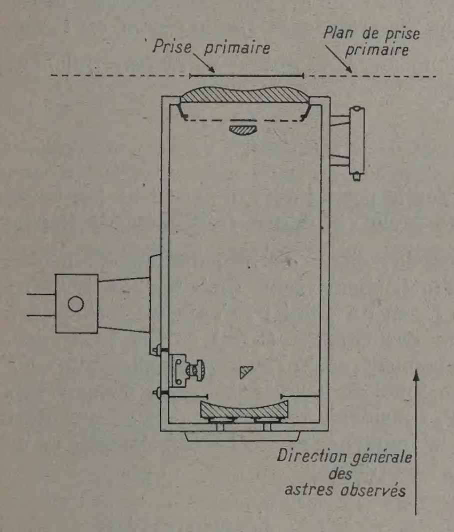



Fig. 2.

Ce n'est que par l'intermédiaire du champ ondulatoire de lumière, qui règne là-même où se trouve un tel instrument, que nous pouvons avoir des renseignements au sujet des astres; et nous devons donc admettre que la réponse fournie par l'instrument doit être déterminée par ce champ de lumière. Appelons *prise d'onde* toute région, tout domaine de l'espace, tel que le champ de lumière qui règne dans ce domaine détermine de manière univoque la réponse de l'instrument. Alors, d'après ce que nous venons de dire, le domaine de l'espace occupé par l'instrument même est une telle prise d'onde. Mais nous savons par le principe de Huygens-Fresnel (sa forme rigoureuse a été donnée par Kirchoff) que le champ lumineux qui règne dans un volume est déterminé par le champ qui règne sur la surface-frontière de ce volume. La seule surface-frontière du domaine occupé par l'instrument est donc aussi une prise d'onde de cet instrument.

Nous appellerons *prise primaire* d'un instrument (*fig.* 2) une prise d'onde qui satisfait aux trois conditions suivantes :

*a.* La prise d'onde est contenue tout entière dans un plan;

*b.* Ce plan est perpendiculaire à la direction générale des astres observés à l'aide de l'instrument;

*c.* Le champ lumineux sur la prise d'onde n'est perturbé ni par l'instrument, ni par tout autre corps; c'est-à-dire que ce champ lumineux est celui qui règnerait sur la prise d'onde si cette dernière surface se trouvait en face des astres dans le vide, loin de tout corps matériel.

Nous admettrons sans démonstration le principe suivant : *Tout instrument astronomique d'observation admet une prise primaire.* Il semble bien, en particulier, que tous les télescopes et interféromètres, optiques ou radioélectriques, admettent comme prise primaire une portion de surface plane, placée devant leur ouverture libre et la recouvrant complètement. On verra un autre exemple de prise primaire (obturateur lunaire) au paragraphe 6.

Je ferai une remarque : les conditions *a* et *b* ne sont pas essentielles. Tous les théorèmes ultérieurs, où figurent des prises primaires, seraient valables avec la seule condition *c*; les énoncés de ces théorèmes ne subiraient pas de modifications essentielles, mais leur démonstration serait simplement un peu plus compliquée.

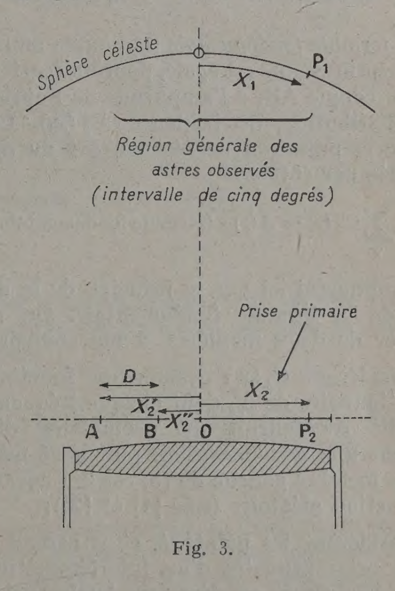



Fig. 3.

Calculons le champ lumineux sur la prise primaire, ce qui est facile parce que ce champ n'est perturbé par rien.

Supposons (*fig.* 3) que le centre O de la sphère céleste se trouve dans le plan de la prise primaire; il serait facile de voir qu'un écart de O hors de ce plan n'a pas d'importance. Soit $x_2$ l'abscisse, à partir de O, d'un point $P_2$ de la prise primaire (théorie à une dimension). Le champ lumineux $C_2$, de longueur d'onde $\lambda$, en $P_2$ est donné d'une manière

générale par

$$C_2(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_1(x_1)\, e^{-2\pi i \frac{x_1 x_2}{\lambda}}\, dx_1. \qquad (5)$$

Nous appellerons *couple* l'ensemble de deux points A et B quelconques pris dans la prise primaire (*fig.* 3). La distance $D$ de ces deux points est l'*écartement* du couple. Nous appellerons *pulsation de résonance* du couple AB la quantité $\rho$ définie par

$$\rho = 2\pi \frac{D}{\lambda} \quad (\text{rad}^{-1}). \qquad (6)$$

Et nous appellerons *période de résonance* du couple la quantité $T$ définie par

$$T = \frac{2\pi}{\rho} = \frac{\lambda}{D} \quad (\text{rad}). \qquad (7)$$

Soit $C'_2$ et $C''_2$ les champs à un moment donné en les deux points d'un couple AB de la prise primaire. Considérons le produit $C'_2 \mathbf{C}''_2$, où $\mathbf{C}''_2$ désigne le conjugué complexe de $C''_2$. Pour chaque fréquence $\nu$ de l'intervalle spectral $\Delta\nu$, les champs $C'_2$ et $C''_2$ en A et B sont différents; et il en est de même en général pour le produit $C'_2 \mathbf{C}''_2$. Prenons la valeur moyenne de ce produit sur les fréquences de l'intervalle $\Delta\nu$.

Notre *formule fondamentale* du couple affirme que cette valeur moyenne est égale, pour un écartement $D$ donné du couple AB, à l'amplitude de Fourier $A(\rho)$ de la distribution de brillance $E_1^2(x_1)$. La définition de la pulsation de résonance $\rho$ du couple a été donnée par (6)

$$\frac{1}{\Delta\nu} \sum_{\nu} C'_2 \mathbf{C}''_2 = A(\rho) \quad (\text{formule fondamentale}). \qquad (8)$$

Je n'indiquerai ici que le principe de la démonstration de la formule fondamentale. On peut la démontrer de deux manières, à ma connaissance :

*a.* Considérant $C_2(x_2)$ comme une fonction aléatoire stationnaire de $x_2$, dont chaque fréquence $\nu$ de l'intervalle $\Delta\nu$ fournit un exemplaire différent, on obtient une démonstration purement mathématique. Le membre gauche de (8) est la « covariance » de la fonction aléatoire (*voir* [1] et [2]);

*b.* Considérant les points A et B comme constituant la prise primaire d'un interféromètre astronomique Michelson, on démontre facilement que les franges d'interférence, produites dans le plan focal de cet instrument, ont pour profondeur l'amplitude $A(\rho)$ de la pulsation de résonance $\rho$ de la prise primaire de l'interféromètre; et, d'autre part, que cette profondeur est aussi égale à la valeur moyenne du produit $C'_2 \mathbf{C}''_2$ sur les diverses fréquences de $\Delta\nu$.

Nous verrons bientôt l'intérêt de notre formule fondamentale (8).

Dans tout instrument astronomique d'observation, il existe des organes matériels récepteurs (œil, plaque photographique, cellule photoélectrique, ampèremètre haute fréquence, etc.) qui mesurent l'état du champ de lumière, qui font ainsi le passage lumière-matière pour l'information concernant les objets célestes. Nous ferons les hypothèses fondamentales suivantes :

Hypothèses fondamentales. — *a.* La réponse de chaque récepteur ne dépend que du carré $E_3^2 = C_3 \mathbf{C}_3$ de l'amplitude $E_3$ du champ $C_3$ au point $P_3$ où est placé le récepteur; ainsi chaque récepteur matériel ne peut mesurer que la densité d'énergie électromagnétique au point où il est.

*b.* Et même, le récepteur ne mesure que la valeur moyenne

$$\frac{1}{\Delta\nu} \sum_{\nu} E_3^2$$

de $E_3^2$ sur le petit intervalle spectral $\Delta\nu$; la mesure sur une seule et unique fréquence est impossible.

*c.* Les équations de propagation de la lumière dans l'instrument sont linéaires. Si bien que le champ $C_3$ en un point $P_3$ s'exprime linéairement en fonction des champs $C_2(x_2)$ sur la prise primaire de l'instrument, selon l'expression suivante, où $F(x_2)$ est une fonction convenable, qui dépend bien du point $P_3$ considéré, mais qui ne dépend pratiquement pas de la fréquence sur $\Delta\nu$; $F(x_2)$ s'annule en dehors de la prise primaire

$$C_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x_2)\, C_2(x_2)\, dx_2. \qquad (9)$$

*d.* Il n'y a pas d'effet Doppler-Fizeau (produit par des miroirs mobiles, etc.) changeant la fréquence de la lumière entre la prise primaire et le récepteur matériel. Ainsi la fréquence du champ $C_3$ est égale à la fréquence $\nu$ des champs $C_2$ qui lui donnent naissance.

Des deux dernières hypothèses l'on tire

$$\frac{1}{\Delta\nu} \sum_{\nu} E_3^2 = \frac{1}{\Delta\nu} \sum_{\nu} C_3 \mathbf{C}_3$$

$$= \frac{1}{\Delta\nu} \sum_{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x'_2)\, \mathbf{F}(\mathbf{x}''_2) \times C_2(x'_2)\, \mathbf{C}_2(\mathbf{x}''_2)\, dx'_2\, dx''_2$$

ou encore

$$\frac{1}{\Delta\nu} \sum_{\nu} E_3^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x'_2)\, \mathbf{F}(\mathbf{x}''_2) \times \left[ \frac{1}{\Delta\nu} \sum_{\nu} C_2(x'_2)\, \mathbf{C}_2(\mathbf{x}''_2) \right] dx'_2\, dx''_2. \qquad (10)$$

La formule (10), jointe aux deux premières hypothèses fondamentales, montre que la réponse de l'instrument d'observation ne dépend que de l'ensemble des produits qui ont la forme du membre

gauche de (8) et qui se rapportent à des couples quelconques de points de la prise primaire.

En employant la formule fondamentale (8), on a alors le

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *La réponse d'un instrument astronomique d'observation ne dépend que de ces amplitudes de Fourier* $A(\Omega)$ *pour lesquelles* $\Omega$ *est la pulsation de résonance* $\rho$ *d'un couple* AB *extrait de la prise primaire.*

Ces amplitudes de Fourier sont donc les seuls caractères de la distribution de brillance qu'un tel instrument puisse nous faire connaître.

Un important corollaire de notre théorème fondamental est le suivant :

*Si la prise primaire d'un instrument est tout entière contenue à l'intérieur d'un cercle de son plan, dont le diamètre* $\Delta$ *sera par définition le diamètre de prise primaire, cet instrument ne pourra nous transmettre des pulsations d'image supérieures en valeur absolue à* $M$, *avec*

$$M = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda} \quad (\text{rad}^{-1}). \tag{11}$$

Notre théorème fondamental repose sur notre formule fondamentale, ainsi que sur nos quatre hypothèses fondamentales : *a*, *b*, *c*, *d*, dont il est temps de dire quelques mots. Ces quatre conditions sont réalisées dans tous les instruments d'observation optiques ou radioélectriques utilisés à ce jour. On peut cependant, sans aucun doute, imaginer des appareils qui mettent en défaut l'hypothèse *a*, l'hypothèse *d* ou même l'hypothèse *c*. Une théorie faite en rendant au champ de lumière $C$ son caractère vectoriel, montrerait que le théorème fondamental reste valable avec un récepteur anisotrope mesurant des quantités quadratiques en les composantes du champ; des mesures « non quadratiques » sont donc nécessaires pour mettre en défaut l'hypothèse *a*. La mise en défaut de l'hypothèse *d* semble offrir peu d'intérêt. On peut mettre en défaut l'hypothèse *c* dans le cas radioélectrique, en faisant passer l'onde, par exemple, dans des tubes électroniques non linéaires. J'ignore si les possibilités, qui semblent ainsi ouvertes, sont réelles, c'est-à-dire s'il peut exister des instruments de performances notables, basés sur la suppression de ces restrictions.

Le champ $C$ a été traité comme un champ scalaire; il serait facile de voir que la nature réelle du champ, qui est vectorielle, n'apporte rien d'essentiellement nouveau à la théorie.

6. **Exemples d'instruments. Cas des instruments qui comportent des pièces mobiles.** — Comme illustration de la théorie, disons quelques mots du réfracteur ou réflecteur astronomique à ouverture circulaire.

On trouve dans sa prise primaire des couples AB ayant tous les écartements possibles, entre $D$ nul et $D$ égal le diamètre d'ouverture $\Delta$ de l'objectif. Cet instrument peut donc nous faire connaître les amplitudes $A(\Omega)$ de toutes les pulsations d'image $\Omega$ de $E_1^2(x_1)$, jusqu'à la pulsation maximum donnée par (11).

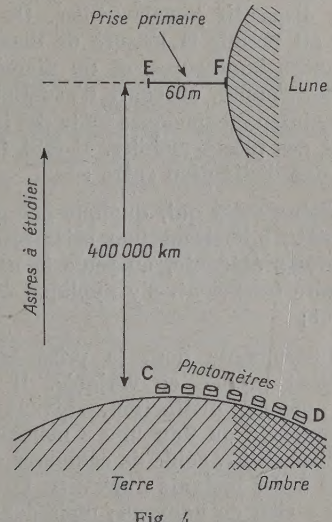



Fig. 4.

$M$ peut servir à mesurer le pouvoir séparateur de la lunette. Comparons avec la théorie classique.

Si l'on désigne par $N$ la période d'image minimum correspondante, on a par (7)

$$N = \frac{\lambda}{\Delta}.$$

Si $\varepsilon$ est le rayon angulaire du disque d'Airy, que donne la théorie classique, on trouve alors immédiatement

$$\varepsilon = 1,22\,N. \tag{12}$$

Cette relation n'est valable que pour l'ouverture circulaire. Pour l'ouverture rectangulaire, on a

$$\varepsilon = N.$$

Examinons maintenant un instrument bizarre, qui a permis d'atteindre de très hautes pulsations d'image. Nous l'appellerons l'*obturateur lunaire*. La Lune, située à presque 400 000 km devant la Terre, produit une ombre relativement aux sources de lumière célestes. On mesure à l'aide de simples photomètres la distribution détaillée des éclairements aux confins gauches de cette ombre (*fig.* 4). Cherchons une prise primaire de ce dispositif. En appliquant le procédé des zones de Fresnel, on trouve facilement que, pour déterminer univoquement les éclairements dans la région utile CD de mesure photométrique, il faut faire intervenir le champ de lumière sur tout un domaine plan EF

s'étendant depuis le bord gauche de la Lune jusqu'à quelques dizaines de mètres à gauche de ce bord. Ce domaine plan constitue donc une prise primaire pour l'instrument. Or quelques dizaines de mètres, pour le diamètre $\Delta$ d'une prise primaire, donnent par (11) une pulsation d'image maximum $M$ tout à fait considérable, beaucoup plus grande que pour tout autre dispositif jamais utilisé. On comprend alors qu'il ait permis la mesure de diamètres stellaires en ondes lumineuses, et du diamètre solaire en ondes hertziennes, au cours d'occultations.

Disons maintenant quelques mots des instruments comportant des pièces mobiles. Il faut faire immédiatement une distinction entre :

*a*. Des instruments qui, quoique comportant des pièces mobiles, admettent une prise primaire fixe. Notre théorie précédente, où seule la nature de la prise primaire intervient, s'y applique évidemment parfaitement;

*b*. Des instruments dont la prise primaire est essentiellement mobile et variable. Il faut alors faire une nouvelle distinction, suivant que l'instrument comporte ou non une « mémoire », c'est-à-dire un dispositif capable de comparer des impressions reçues à des instants différents. Dans la négative, il n'y a rien de nouveau; mais dans l'affirmative, on a des possibilités théoriques amusantes d'instruments à très haut pouvoir séparateur.

7. **Signification du théorème de la borne supérieure.** — Le corollaire (11) de notre théorème fondamental limite d'une manière parfaitement rigoureuse et précise les renseignements que peut donner un instrument d'observation; *il faut remarquer qu'un tel résultat n'était nullement atteint par les théories classiques du pouvoir séparateur*, quoi qu'il semble.

Mais cette limitation est exprimée dans le langage de l'analyse de Fourier. Voyons s'il est possible de la traduire dans une langue plus compréhensible pour l'expérimentateur. Il suffit de recourir au théorème de la borne supérieure (§ 4).

En effet, selon ce théorème, un instrument qui ne nous fait pas connaître les hautes pulsations d'image ne pourra nous faire distinguer un détail abrupt d'un détail différent, aux contours doux, mais présentant les mêmes amplitudes de Fourier dans les basses fréquences. Cela ne signifie pas qu'un détail, même très petit s'il est intense, ne sera pas aperçu, décelé, mais cela signifie qu'il y aura une ambiguïté, impossible à écarter, au sujet de sa nature. Cette ambiguïté augmente quand le diamètre de la prise primaire diminue.

Manuscrit reçu le 26 janvier 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] LÉVY P. — Processus stochastiques, p. 97-99.
[2] LÉVY P. — Analyse harmonique, Congrès C. N. R. S. de Nancy, p. 113-114.

---

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM, TOME 16, JUIN 1955, PAGE 438.

# LE GROUPE RELATIVISTE DE LA THÉORIE UNITAIRE D'EINSTEIN-SCHRÖDINGER

Par J. WINOGRADZKI,
Institut Henri Poincaré, Paris.

**Sommaire.** — La méthode variationnelle classique pour l'établissement des équations du champ gravifique pur ne détermine pas les équations du champ d'une manière univoque si l'on admet que la connexion affine et le tenseur métrique sont, en général, asymétriques. On peut lever cette difficulté en admettant que le groupe de la théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger est plus vaste que le groupe de la Relativité générale. Cette hypothèse impose une certaine modification des postulats qui donnent, en Relativité générale, les équations du champ gravifique pur. Le nouvel ensemble de postulats conduit bien à un seul système d'équations du champ. Il détermine l'extension du groupe relativiste. Cette extension est constituée par le groupes des $\lambda$-transformations, introduites par M. Einstein *a priori*, ou par un groupe apparenté.

L'Univers de la théorie unitaire d'Einstein Schrödinger est un espace quadri-dimensionnel affine et métrique, la métrique étant donnée par un tenseur du second rang qui représente le champ. En général,

la connexion affine et le tenseur métrique sont asymétriques. Les équations du champ ont été établies de différentes manières. L'une d'entre elles, due à M. Einstein, est particulièrement intéressante. Le principe de Relativité générale étant insuffisant pour déterminer les équations du champ généralisé, M. Einstein substitue au principe de Relativité générale un principe de Relativité plus sévère et c'est de ce principe qu'il déduit les équations du champ. Il montre en effet que si l'on exige l'invariance des équations du champ par rapport aux $\lambda$-transformations, les équations du champ sont pratiquement déterminées [1]. Dans ce travail, nous montrons qu'il n'est pas nécessaire d'imposer *a priori* la nature précise de l'extension du groupe relativiste. Des considérations simples suggèrent un postulat à partir duquel on peut la déterminer. Le même postulat conduit aux équations du champ [2].

1. **Bases axiomatiques**. — L'une des méthodes classiques pour l'établissement des équations du champ gravifique pur consiste à les déduire de l'ensemble (E) des postulats suivants :

I. *L'Univers est un espace quadri-dimensionnel affine et métrique, la métrique étant donnée par un tenseur du second rang.*

II. *La connexion affine et le tenseur métrique sont symétriques.*

III. *Les équations du champ dérivent d'un principe variationnel. On fait varier la connexion affine et le tenseur métrique.*

IV. *L'hamiltonien est constitué par la densité de courbure.*

V. *Les variations sont effectuées sans conditions* a priori.

Si l'on supprime le postulat II, l'Univers a plusieurs densités de courbure se déduisant les unes des autres par transposition soit du tenseur métrique, soit de la connexion affine, soit des deux,

$$\mathfrak{g}^{ik} R_{ik}, \quad \mathfrak{g}^{ik} R_{ki}, \quad \mathfrak{g}^{ik} \tilde{R}_{ik}, \quad \mathfrak{g}^{ik} \tilde{R}_{ki},$$

$\mathfrak{g}^{ik}$ étant la densité du tenseur métrique, $R_{ik}$ et $\tilde{R}_{ik}$, les deux tenseurs de Ricci-Einstein

$$R_{ik} = \Gamma^m_{ik,m} - \Gamma^m_{im,k} + \Gamma^m_{pm}\Gamma^p_{ik} - \Gamma^m_{ip}\Gamma^p_{mk}, \qquad (1)$$

$$\tilde{R}_{ik} = \Gamma^m_{ki,m} - \Gamma^m_{mi,k} + \Gamma^m_{mp}\Gamma^p_{ki} - \Gamma^m_{pi}\Gamma^p_{km}. \qquad (2)$$

Évitant tout choix arbitraire, transcrivons le postulat IV :

IV *a*. *L'hamiltonien est constitué par une quelconque des densités de courbure.*

L'ensemble (E′) des postulats I, III, IV *a*, V ne détermine pas les équations du champ d'une manière univoque, les équations du champ dépendent du choix de l'hamiltonien [3]. L'ensemble de postulats (E′) est donc inacceptable. Cherchons à le modifier en restant aussi proches que possible de (E).

L'ensemble de postulats (E) peut s'écrire I, III, IV *a* et un postulat réunissant II et V :

V *a*. *Les variations sont effectuées sous la condition* a priori

$$g_{ik} = g_{ki}, \qquad \Gamma^i_{km} = \Gamma^i_{mk}.$$

Ainsi, (E′) ne se distingue de (E) que par le dernier postulat. C'est donc ce postulat que nous modifierons. Nous baserons cette modification sur l'idée einsteinienne d'une extension du groupe relativiste, mais sans imposer *a priori*, comme le fait M. Einstein, la nature précise de cette extension.

Les divers systèmes d'équations du champ résultant de (E′) sont déjà invariants, comme nous le verrons plus loin, non seulement par rapport aux transformations de coordonnées, mais aussi par rapport à certaines autres transformations. L'hypothèse que les équations du champ satisfont à un principe de Relativité plus sévère que le principe de Relativité générale n'est donc pas suffisante pour indiquer comment il faut modifier le postulat V. Ainsi, à moins d'introduire une limitation arbitraire, il ne reste qu'à admettre la validité d'un principe de Relativité aussi sévère que possible, c'est-à-dire l'invariance des équations du champ par rapport à un groupe aussi vaste que possible. Pour donner à cette hypothèse la précision nécessaire, il suffit d'admettre que les transformations qui constituent l'extension du groupe relativiste (« transformations de jauge ») jouissent de certaines propriétés générales. Appelons $J$ le groupe des transformations possédant ces propriétés générales des transformations de jauge. Pour obtenir les équations du champ satisfaisant au principe de Relativité le plus sévère, tout en modifiant le postulat V le moins possible, nous le remplacerons par le postulat suivant :

V *b*. *Les variations sont effectuées sans conditions* a priori, *à moins qu'une variation liée du tenseur métrique ou de la connexion affine ne donne des équations du champ satisfaisant à un principe de Relativité plus sévère que les équations obtenues par variation libre. Dans ce cas, on impose à la grandeur variée correspondante, tenseur métrique ou connexion affine, des conditions, du premier ordre au plus, fournissant des équations du champ invariantes par rapport au sous-groupe le plus vaste du groupe $J$.*

Si l'on adopte la définition fort naturelle du groupe $J$ qui suit, l'ensemble (E″) des postulats I, III, IV *a*, V *b* détermine l'extension du groupe relativiste (§ 2) et conduit aux équations du champ (§ 2 et 3).

Il nous reste à déterminer les propriétés des $J$-transformations, c'est-à-dire les propriétés géné-

rales à imposer aux transformations de jauge. Nous admettrons d'abord que ces transformations, comme les transformations de jauge de l'électromagnétisme, laissent le champ invariant et en sont indépendantes. Puisque dans la théorie classique du champ gravifique le tenseur métrique constitue le champ, il doit, en gravifique généralisée, sinon constituer le champ, du moins en faire partie. Les $J$-transformations s'écrivent donc

$$\left.\begin{aligned} J(g_{ik}) &= g_{ik}, \\ J(\Gamma^i_{km}) &= \Gamma^i_{km} + \Lambda^i_{km}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$\Lambda_{km}$ étant indépendant du tenseur métrique. $\Lambda^i_{km}$ est un tenseur en tant que différence de deux connexions affines. Nous admettrons que ce tenseur ne dépend pas, de par sa structure, de la connexion affine, excluant ainsi des $J$-transformations et, par conséquent, des transformations de jauge, la transposition de la connexion affine. On vérifie aisément que l'ensemble des transformations de coordonnées et des $J$-transformations forme bien un groupe.

Si $\mathbf{A}$ est un être géométrique quelconque de l'Univers, on a, d'après (3),

$$J[\mathbf{A}(g_{ik}, \Gamma^i_{km})] = \mathbf{A}(g_{ik}, \Gamma^i_{km} + \Lambda^i_{km}). \tag{4}$$

2. **Les transformations de jauge. Le mode de variation.** — Faisons varier le tenseur métrique sous une condition *a priori*, du premier ordre au plus,

$$\mathfrak{f}^{\alpha}_{\beta\dots} = 0. \tag{5}$$

La variation liée contient la variation libre comme cas particulier ($\mathfrak{f}^{\alpha}_{\beta\dots} \equiv 0$). Les équations du champ s'écrivent

$$\frac{\delta}{\delta \mathfrak{g}^{ik}}[\mathfrak{H} + \sigma^{\beta\dots}_{\alpha\dots}\mathfrak{f}^{\alpha\dots}_{\beta\dots}] = 0, \tag{6}$$

$\delta$ désignant la dérivation hamiltonienne

$$\frac{\delta}{\delta \mathfrak{g}^{ik}} = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{g}^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{g}^{ik}{}_{,m}},$$

$\mathfrak{H}$ l'hamiltonien et $\sigma^{\beta\dots}_{\alpha\dots}$ les multiplicateurs de Lagrange. Ces équations sont invariantes par rapport aux $J$-transformations pour lesquelles elles entraînent

$$\frac{\delta}{\delta \mathfrak{g}^{ik}}[J(\mathfrak{H}) + \sigma'^{\beta\dots}_{\alpha\dots}\mathfrak{f}^{\alpha\dots}_{\beta\dots}] = 0. \tag{7}$$

Prenons d'abord pour hamiltonien la densité de courbure $\mathfrak{g}^{ik} R_{ik}$. D'après (1) et (4),

$$J(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H} + \mathfrak{g}^{ik}(\Lambda^m_{ik,m} - \Lambda^m_{im,k} + A_{ik} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}B^{\beta\gamma}_{\alpha ik}), \tag{8}$$

où

$$A_{ik} = \Lambda^m_{pm}\Lambda^p_{ik} - \Lambda^m_{ip}\Lambda^p_{mk}, \tag{9}$$

$$B^{\beta\gamma}_{\alpha ik} = \Lambda^m_{\alpha m}\delta^{\beta}_i\delta^{\gamma}_k + \Lambda^{\beta}_{ik}\delta^{\gamma}_{\alpha} - \Lambda^{\beta}_{i\alpha}\delta^{\gamma}_k - \Lambda^{\gamma}_{\alpha k}\delta^{\beta}_i. \tag{10}$$

D'où, comme $\Lambda^i_{km}$ ne dépend pas du tenseur métrique,

$$\frac{\delta}{\delta \mathfrak{g}^{ik}}[J(\mathfrak{H}) + \sigma'^{\beta\dots}_{\alpha\dots}\mathfrak{f}^{\alpha\dots}_{\beta\dots}] - \frac{\delta}{\delta \mathfrak{g}^{ik}}[\mathfrak{H} + \sigma^{\beta\dots}_{\alpha\dots}\mathfrak{f}^{\alpha\dots}_{\beta\dots}]$$
$$= \Lambda^m_{ik,m} - \Lambda^m_{im,k} + A_{ik} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}B^{\beta\gamma}_{\alpha ik} + \frac{\delta}{\delta \mathfrak{g}^{ik}}[\sigma''^{\beta\dots}_{\alpha\dots}\mathfrak{f}^{\alpha\dots}_{\beta\dots}] \tag{11}$$

où

$$\sigma''^{\beta\dots}_{\alpha\dots} = \sigma'^{\beta\dots}_{\alpha\dots} - \sigma^{\beta\dots}_{\alpha\dots}. \tag{12}$$

L'équation

$$\Lambda^m_{ik,m} - \Lambda^m_{im,k} + A_{ik} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}B^{\beta\gamma}_{\alpha ik} + \frac{\delta}{\delta \mathfrak{g}^{ik}}[\sigma''^{\beta\dots}_{\alpha\dots}\mathfrak{f}^{\alpha\dots}_{\beta\dots}] = 0 \tag{13}$$

constitue donc une condition nécessaire et suffisante pour que les équations du champ (6) soient invariantes par rapport à une $J$-transformation. Comme $\mathfrak{f}^{\alpha}_{\beta\dots}$ et $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sont indépendants de la connexion affine, une condition nécessaire pour que l'équation (13) soit satisfaite est

$$B^{\beta\gamma}_{\alpha ik} = 0. \tag{14}$$

Une condition nécessaire pour que (14) soit satisfaite est

$$B^{\beta\gamma}_{\alpha\gamma k} = 0 \tag{15}$$

ou, explicitement,

$$\Lambda^m_{\alpha m}\delta^{\beta}_k - \Lambda^{\beta}_{k\alpha} = 0. \tag{16}$$

Posons $\Lambda^m_{\alpha m} = \lambda_{\alpha}$, l'équation (16) s'écrit

$$\Lambda^i_{km} = \delta^i_k\lambda_m. \tag{17}$$

Ainsi, quel que soit le mode de variation, les équations du champ, obtenues en faisant varier le tenseur métrique, ne peuvent être invariantes que par rapport à des $J$-transformations dont le tenseur $\Lambda^i_{km}$ a la structure donnée par (17). Les $J$-transformations satisfaisant à (17) sont les $\lambda$-transformations introduites par M. Einstein *a priori* [1]. L'ensemble des $\lambda$-transformations et des transformations de coordonnées forme bien un groupe. Remarquons qu'à l'exception de la transformation identique, aucune $\lambda$-transformation ne laisse invariante la torsion, ni même le vecteur de torsion. D'après la propriété fondamentale des transformations de jauge, ces grandeurs, quoique tensorielles, ne peuvent donc pas faire partie du champ.

Montrons maintenant qu'il existe un mode de variation du tenseur métrique qui donne des équations du champ invariantes par rapport à toutes les $\lambda$-transformations. En vertu de (17), l'équation (14) est satisfaite, $A_{ik} = 0$ et la condition nécessaire et suffisante (13) s'écrit

$$\lambda_{k,i} - \lambda_{i,k} + \frac{\delta}{\delta \mathfrak{g}^{ik}}[\sigma''^{\beta\dots}_{\alpha\dots}\mathfrak{f}^{\alpha\dots}_{\beta\dots}] = 0 \tag{18}$$

ou

$$\lambda_{k,i} - \lambda_{i,k} + \sigma''^{\beta\dots}_{\alpha\dots}\frac{\delta \mathfrak{f}^{\alpha\dots}_{\beta\dots}}{\delta \mathfrak{g}^{ik}} - \sigma''^{\beta\dots}_{\alpha\dots,m}\frac{\partial \mathfrak{f}^{\alpha\dots}_{\beta\dots}}{\partial \mathfrak{g}^{ik}{}_{,m}} = 0. \qquad (19)$$

Cherchons une solution de la forme

$$\mathfrak{f}^{\alpha\dots}_{\beta\dots} = \mathfrak{f}^{\alpha}, \qquad (20)$$

$$\frac{\delta \mathfrak{f}^{\alpha}}{\delta \mathfrak{g}^{ik}} = 0. \qquad (21)$$

En effet, l'équation (19) ne contient alors, en dehors d'une certaine dérivée de $\mathfrak{f}$, que des dérivées de vecteurs. Elle prend la forme simple

$$\lambda_{k,i} - \lambda_{i,k} - \sigma''_{\alpha,m}\frac{\partial \mathfrak{f}^{\alpha}}{\partial \mathfrak{g}^{ik}{}_{,m}} = 0 \qquad (22)$$

ou

$$\lambda_{\alpha,m}\left(\delta^{\alpha}_{k}\delta^{m}_{i} - \delta^{\alpha}_{i}\delta^{m}_{k}\right) - \sigma''_{\alpha,m}\frac{\partial \mathfrak{f}^{\alpha}}{\partial \mathfrak{g}^{ik}{}_{,m}} = 0. \qquad (22')$$

Cette équation admet la solution évidente

$$\sigma''_{\alpha} = \lambda_{\alpha}, \qquad (23)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{\alpha}}{\partial \mathfrak{g}^{ik}{}_{,m}} = \delta^{\alpha}_{k}\delta^{m}_{i} - \delta^{\alpha}_{i}\delta^{m}_{k}. \qquad (24)$$

D'où, en intégrant (24) par rapport à $\mathfrak{g}^{ik}{}_{,m}$,

$$\mathfrak{f}^{\alpha} = 2\left(\mathfrak{g}^{\overset{m\alpha}{\vee}}{}_{,m} - \varphi^{\alpha}\right), \qquad (25)$$

$\varphi^{\alpha}$ étant une fonction arbitraire ne contenant pas les dérivées premières du tenseur métrique. D'après (25),

$$\frac{\delta \mathfrak{f}^{\alpha}}{\delta \mathfrak{g}^{ik}} = -2\frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial \mathfrak{g}^{ik}}. \qquad (26)$$

Donc, d'après (21), $\varphi^{\alpha}$ ne doit pas contenir le tenseur métrique lui-même. Ainsi, les équations du champ, obtenues en faisant varier le tenseur métrique, sont invariantes par rapport à toutes les $\lambda$-transformations si la variation est effectuée sous la condition *a priori*

$$\mathfrak{f}^{\alpha} \equiv 2\left(\mathfrak{g}^{\overset{m\alpha}{\vee}}{}_{,m} - \varphi^{\alpha}\right) = 0, \qquad (27)$$

$\varphi^{\alpha}$ étant indépendante du tenseur métrique. Les équations du champ, obtenues en faisant varier le tenseur métrique sous la condition (27), sont indépendantes du choix de $\varphi^{\alpha}$. On peut donc remplacer (27) par

$$\mathfrak{g}^{\overset{m\alpha}{\vee}}{}_{,m} = 0. \qquad (28)$$

L'étude des équations du champ obtenues en faisant varier la connexion affine déterminera $\varphi^{\alpha}$ et l'on obtiendra précisément $\varphi^{\alpha} = 0$.

Si l'on remplace (23) par la relation linéaire générale

$$\sigma''_{\alpha} = A^{\beta}_{\alpha}\lambda_{\beta} + B_{\alpha}, \qquad (29)$$

où $A^{\alpha}_{\beta}$ et $B_{\alpha}$ sont des constantes et dét $(A^{\alpha}_{\beta}) \neq 0$, on retrouve la condition (28).

Remarquons que si $\lambda_i$ est un gradient, l'équation (18) se réduit à

$$\frac{\delta}{\delta \mathfrak{g}^{ik}}\left[\sigma''^{\beta\dots}_{\alpha\dots}\mathfrak{f}^{\alpha\dots}_{\beta\dots}\right] = 0. \qquad (30)$$

Or, pour que les équations du champ (6) soient invariantes par rapport à une $J$-transformation, il *faut* qu'elles entraînent les équations (7), mais il *suffit* qu'elles entraînent les équations de la forme (7) où $\sigma'^{\beta\dots}_{\alpha\dots} = \sigma^{\beta\dots}_{\alpha\dots}$. Mais alors $\sigma''^{\beta\dots}_{\alpha\dots} = 0$ et l'équation (30) devient une identité. Ainsi, quel que soit le mode de variation, les équations du champ (6), obtenues en faisant varier le tenseur métrique, sont invariantes par rapport aux $\lambda$-transformations dont le vecteur $\lambda_i$ est un gradient. On peut retrouver ce résultat en examinant l'hamiltonien. En effet, d'après (8), si la $J$-transformation est une $\lambda$-transformation,

$$J(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H} + \mathfrak{g}^{ik}(\lambda_{k,i} - \lambda_{i,k}). \qquad (31)$$

Donc, si $\lambda_i$ est un gradient,

$$J(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}. \qquad (32)$$

D'après ce qui précède, les $\lambda$-transformations constitueront les transformations de jauge s'il existe un mode de variation de la connexion affine qui fournit des équations du champ également invariantes par rapport aux $\lambda$-transformations. Or, si la $J$-transformation est une $\lambda$-transformation, $J(\mathfrak{H}) - \mathfrak{H}$ ne dépend pas de la connexion affine. Cela résulte de l'équation (8) en tenant compte du fait que (17) entraîne (14) ou, immédiatement, de l'équation (31). Et, comme $\Lambda^{i}_{km}$ ne dépend pas de la connexion affine,

$$\frac{\delta}{\delta J(\Gamma^{i}_{km})} = \frac{\delta}{\delta \Gamma^{i}_{km}}. \qquad (33)$$

Donc, les équations du champ, obtenues en faisant varier la connexion affine aussi bien librement que sous une condition *a priori* $\lambda$-invariante quelconque, sont invariantes par rapport aux $\lambda$-transformations. Quant au mode de variation de la connexion affine, il résulte du postulat V *b* que cette variation est à effectuer sans conditions *a priori*.

Montrons qu'inversement, quel que soit le mode de variation, les équations du champ, obtenues en faisant varier la connexion affine, ne sont pas invariantes par rapport à des $J$-transformations autres que les $\lambda$-transformations. La démonstration est analogue à celle donnée plus haut du théorème correspondant pour le tenseur métrique. Faisons, en effet, varier la connexion affine sous une condition *a priori*, du premier ordre au plus,

$$\mathfrak{F}^{\alpha\dots}_{\beta\dots} = 0. \qquad (34)$$

La variation liée contient la variation libre comme cas particulier ($\mathfrak{F}^{\alpha\dots}_{\beta\dots} \equiv 0$). Les équations du champ s'écrivent

$$\frac{\delta}{\delta \Gamma^{i}_{km}}\left[\mathfrak{H} + \sigma^{\beta\dots}_{\alpha\dots}\mathfrak{F}^{\alpha\dots}_{\beta\dots}\right] = 0. \qquad (35)$$

D'après (33), ces équations sont invariantes par rapport aux $J$-transformations pour lesquelles elles entraînent

$$\frac{\delta}{\delta \Gamma^{i}_{km}}\left[J(\mathfrak{H}) + \sigma'^{\beta\ldots}_{\alpha\ldots} J(\mathfrak{F}^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots})\right] = 0. \qquad (36)$$

D'où, d'après (8), comme $\Lambda^{i}_{km}$ ne dépend pas de la connexion affine,

$$\frac{\delta}{\delta \Gamma^{i}_{km}}\left[J(\mathfrak{H}) + \sigma'^{\beta\ldots}_{\alpha\ldots} J(\mathfrak{F}^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots})\right] - \frac{\delta}{\delta \Gamma^{i}_{km}}\left[\mathfrak{H} + \sigma^{\beta\ldots}_{\alpha\ldots} \mathfrak{F}^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}\right]$$

$$= \mathfrak{g}^{\alpha\beta} B^{km}_{i\alpha\beta} + \frac{\delta}{\delta \Gamma^{i}_{km}}\left[\sigma'^{\beta\ldots}_{\alpha\ldots} J(\mathfrak{F}^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}) - \sigma^{\beta\ldots}_{\alpha\ldots} \mathfrak{F}^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}\right]. \qquad (37)$$

L'équation

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta} B^{km}_{i\alpha\beta} + \frac{\delta}{\delta \Gamma^{i}_{km}}\left[\sigma'^{\beta\ldots}_{\alpha\ldots} J(\mathfrak{F}^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}) - \sigma^{\beta\ldots}_{\alpha\ldots} \mathfrak{F}^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}\right] = 0 \qquad (38)$$

constitue donc une condition nécessaire et suffisante pour que les équations du champ (35) soient invariantes par rapport à une $J$-transformation. Comme $\mathfrak{F}^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}$ et $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sont indépendants du tenseur métrique une condition nécessaire pour que (38) soit satisfaite est encore constituée par (14) et, par conséquent, par (17).

Ainsi, si l'on prend pour hamiltonien la densité de courbure $\mathfrak{g}^{ik} R_{ik}$, les transformations de jauge sont les $\lambda$-transformations. Il est immédiat qu'il en est de même si $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} R_{ki}$, et que si l'hamiltonien est formé à l'aide de l'autre tenseur de Ricci-Einstein ($\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} \tilde{R}_{ik}$ ou $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} \tilde{R}_{ki}$), les transformations de jauge sont constituées par les $J$-transformations telles que

$$J(\tilde{\Gamma}^{i}_{km}) = \tilde{\Gamma}^{i}_{km} + \delta^{i}_{k} \lambda_m \qquad (\tilde{\Gamma}^{i}_{km} \equiv \Gamma^{i}_{mk}), \qquad (39)$$

c'est-à-dire

$$J(\Gamma^{i}_{km}) = \Gamma^{i}_{km} + \lambda_k \delta^{i}_{m} \qquad (40)$$

(« $\tilde{\lambda}$-transformations »). L'ensemble des $\tilde{\lambda}$-transformations et des transformations de coordonnées forme un groupe.

Enfin, nous avons vu que si $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} R_{ik}$, la variation du tenseur métrique sous la condition *a priori* (28) et la variation libre de la connexion affine, sont conformes au postulat V *b*. Ce résultat est valable pour les autres hamiltoniens, puisque les quatre hamiltoniens se déduisent les uns des autres par des transpositions.

3. **Les équations du champ.** — Montrons que les équations du champ, obtenues en faisant varier le tenseur métrique sous la condition *a priori* (28) et la connexion affine librement, sont bien indépendantes du choix de l'hamiltonien.

Les équations du champ, obtenues en faisant varier le tenseur métrique sous la condition *a priori* (28), s'écrivent

$$\frac{\delta}{\delta \mathfrak{g}^{ik}}\left(\mathfrak{H} + \sigma_\alpha \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{\beta\alpha}}{}_{,\beta}\right) = \frac{\delta \mathfrak{H}}{\delta \mathfrak{g}^{ik}} + \frac{1}{2}(\sigma_{i,k} - \sigma_{k,i}) = 0. \qquad (41)$$

D'où, en éliminant les multiplicateurs de Lagrange en posant

$$\frac{\delta \mathfrak{H}}{\delta \mathfrak{g}^{ik}} = W_{ik}$$

et en désignant par Cycl la somme des permutations circulaires,

$$W_{\underset{-}{ik}} = 0. \qquad (42)$$

$$\text{Cycl}\, W_{\underset{\vee}{ik},m} = 0. \qquad (43)$$

Comme l'hamiltonien est une densité de courbure, $W_{ik}$ est l'un des deux tenseurs de Ricci-Einstein et s'exprime donc en fonction de la connexion affine et de ses dérivées premières.

Les équations du champ, obtenues en faisant varier librement la connexion affine, s'écrivent

$$\frac{\delta \mathfrak{H}}{\delta \Gamma^{i}_{km}} = 0. \qquad (44)$$

Elles relient la connexion affine au tenseur métrique et à ses dérivées premières. Si l'on considère comme les inconnues les 64 composantes de la connexion affine, ces équations forment un système de 64 équations algébriques linéaires. Ce système ne détermine pas entièrement la connexion affine en fonction du tenseur métrique et de ses dérivées premières. Il est en effet invariant par rapport aux transformations de jauge. Mais l'ensemble des équations du champ possède la même invariance. Pour obtenir les équations auxquelles satisfait le tenseur métrique en vertu des équations (42) et (43), il n'est donc pas nécessaire de remplacer dans ces équations la connexion affine par la solution générale de (44). On obtient les mêmes équations pour le tenseur métrique en substituant à la solution générale de (44) une solution particulière quelconque, c'est-à-dire la solution d'une forme dégénérée quelconque de ce système, déduite de la forme non dégénérée (44) par une transformation de jauge.

Si l'hamiltonien est $\mathfrak{g}^{ik} R_{ik}$, (44) s'écrit

$$\mathfrak{g}^{ik}{}_{,m} + \mathfrak{g}^{\alpha k} \Gamma^{i}_{\alpha m} + \mathfrak{g}^{i\alpha} \Gamma^{k}_{m\alpha} - \mathfrak{g}^{ik} \Gamma^{\alpha}_{m\alpha} = (\mathfrak{g}^{i\alpha}{}_{,\alpha} + \mathfrak{g}^{\alpha\beta} \Gamma^{i}_{\alpha\beta}) \delta^{k}_{m}. \qquad (45)$$

Remarquons d'abord qu'en contractant $i$ et $m$, on obtient l'équation (28), ce qui montre que $\varphi^\alpha$ est nul. En contractant $k$ et $m$, on obtient

$$\mathfrak{g}^{i\alpha}{}_{,\alpha} + \mathfrak{g}^{\alpha\beta} \Gamma^{i}_{\alpha\beta} = -\frac{2}{3} \mathfrak{g}^{i\alpha} \Gamma_\alpha \qquad \left(\Gamma_\alpha \equiv \Gamma^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\right). \qquad (46)$$

L'équation (45) peut donc s'écrire

$$\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}{}_{;m} = \mathfrak{g}^{ik} \Gamma_m - \frac{2}{3} \mathfrak{g}^{i\alpha} \Gamma_\alpha \delta^{k}_{m}. \qquad (47)$$

On peut, par une $\lambda$-transformation, donner au vecteur de torsion $\Gamma_i$ une valeur quelconque. La $\lambda$-transformation qui annule le vecteur de torsion, appliquée à l'équation du champ (47), la met sous

la forme dégénérée

$$\Gamma_i = 0, \qquad \mathfrak{g}^{\overset{ik}{+\,-}}{}_{;m} = 0 \tag{48}$$

équivalente à

$$\mathfrak{g}^{\overset{ki}{\vee}}{}_{,k} = 0, \qquad \mathfrak{g}^{\overset{ik}{+\,-}}{}_{;m} = 0. \tag{49}$$

Ce système est invariant par rapport à la transposition simultanée du tenseur métrique et de la connexion affine. La transposition de l'une de ces deux grandeurs seulement le transforme en

$$\Gamma_i = 0, \qquad \mathfrak{g}^{\overset{ik}{-\,+}}{}_{;m} = 0. \tag{50}$$

Le système (48) constitue donc une forme dégénérée du système (44) si l'hamiltonien est $\mathfrak{g}^{ik} R_{ik}$ (dégénérescence par $\lambda$-transformation) ou $\mathfrak{g}^{ik} \tilde{R}_{ki}$ (dégénérescence par $\tilde{\lambda}$-transformation); le système (50) constitue une forme dégénérée du système (44) si l'hamiltonien est $\mathfrak{g}^{ik} R_{ki}$ (dégénérescence par $\lambda$-transformation) ou $\mathfrak{g}^{ik} \tilde{R}_{ik}$ (dégénérescence par $\tilde{\lambda}$-transformation).

Désignons par $\underset{0}{\Gamma}{}^i_{km}$ la solution, bien déterminée sauf dans des cas particuliers, du système (48) [4]. La solution du système (50) est $\underset{0}{\tilde{\Gamma}}{}^i_{km}$. Posons

$$R_{ik}\left(\underset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\right) = \underset{0}{R}_{ik}, \qquad \tilde{R}_{ik}\left(\underset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\right) = \underset{0}{\tilde{R}}_{ik}.$$

Écrivons la dérivée hamiltonienne $W_{ik}$ dans les quatre cas :

I. $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} R_{ik}, \quad W_{ik} = R_{ik}\left(\underset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\right) = \underset{0}{R}_{ik}$;

II. $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} R_{ki}, \quad W_{ki} = R_{ik}\left(\underset{0}{\tilde{\Gamma}}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\right) = \underset{0}{\tilde{R}}_{ik}$;

III. $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} \tilde{R}_{ik}, \quad W_{ik} = \tilde{R}_{ik}\left(\underset{0}{\tilde{\Gamma}}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\right) = \underset{0}{R}_{ik}$;

IV. $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} \tilde{R}_{ki}, \quad W_{ki} = \tilde{R}_{ik}\left(\underset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\right) = \underset{0}{\tilde{R}}_{ik}$.

Le champ $\mathfrak{g}^{ik}$ satisfait donc à l'un des deux systèmes suivants :

— dans les cas I et III :

$$\mathfrak{g}^{\overset{ki}{\vee}}{}_{,k} = 0, \tag{28}$$

$$\underset{0\,-}{R}_{ik} = 0, \tag{42 a}$$

$$\text{Cycl}\ \underset{0\,\vee}{R}_{ik,m} = 0; \tag{43 a}$$

— dans les cas II et IV :

$$\mathfrak{g}^{\overset{ki}{\vee}}{}_{,k} = 0, \tag{28}$$

$$\underset{0}{\tilde{R}}_{ik} = 0, \tag{42 b}$$

$$\text{Cycl}\ \underset{0\,\vee}{\tilde{R}}_{ik,m} = 0. \tag{43 b}$$

Ces deux systèmes sont identiques. En effet, on a

$$\underset{-}{\tilde{R}}_{ik} - \underset{-}{R}_{ik} = \Gamma_{i,k} + \Gamma_{k,i} - 2\Gamma_\alpha \underset{-}{\Gamma}{}^{\alpha}_{ik} \tag{51}$$

et

$$\underset{\vee}{\tilde{R}}_{ik} + \underset{\vee}{R}_{ik} = -\underset{-}{\Gamma}{}^{\alpha}_{i\alpha,k} + \underset{-}{\Gamma}{}^{\alpha}_{k\alpha,i} + 2\Gamma_\alpha \underset{\vee}{\Gamma}{}^{\alpha}_{ik}. \tag{52}$$

Mais $\underset{0}{\Gamma}_i = 0$.

Donc

$$\underset{0\,-}{\tilde{R}}_{ik} = \underset{0\,-}{R}_{ik} \quad \text{et} \quad \text{Cyd}\ \underset{0\,\vee}{\tilde{R}}_{ik,m} = -\text{Cyd}\ \underset{0\,\vee}{R}_{ik,m}. \tag{53}$$

Les équations du champ déduites des postulats (E') dépendent du choix de l'hamiltonien. Mais en vertu de ces équations, quel que soit l'hamiltonien, le tenseur métrique satisfait aux équations qui constituent les équations du champ déduites des postulats (E'') [3].

Manuscrit reçu le 30 novembre 1954.

BIBLIOGRAPHIE.


[1] EINSTEIN A. — Generalization of Gravitation Theory. Appendix II of the Meaning of Relativity. Princeton, 1953. Nous utilisons les notations de ce Mémoire.
Extension du groupe relativiste. Dans : Louis de Broglie, physicien et penseur. Albin Michel, 1953.

[2] WINOGRADZKI J. — *C. R. Acad. Sc.*, 1954, **239**, 1359.

[3] WINOGRADZKI J. — *C. R. Acad. Sc.*, 1955, **240**, 945.

[4] TONNELAT M. A. — *J. Physique Rad.*, 1951, **12**, 81 et 1952, **13**, 177.

# DÉPLACEMENT DE KNIGHT DANS LES ALLIAGES

Par JACQUES FRIEDEL,
Centre de Recherches Métallurgiques de l'École des Mines de Paris.

**Sommaire.** — Des calculs récents de la densité électronique dans les alliages prévoient que le déplacement de Knight des noyaux de la matrice n'est pratiquement pas affecté par la substitution d'atomes en soluté, même à assez fortes concentrations.

Dans les substances métalliques, le « déplacement de Knight » $\delta\nu$ de la résonance magnétique nucléaire [1] est proportionnel à

$$x_S(\mathbf{r}) = V\,|\,\Psi_S(\mathbf{r})\,|^2\, n_0(E_F).$$

$n_0(E_F)$ est ici la densité des états (par unités de volume et d'énergie) au niveau de Fermi $E_F$; $\Psi_S$ $(\mathbf{r})$ est la fraction à symétrie sphérique de la fonction d'onde $\Psi$ $(\mathbf{r})$ d'un électron d'énergie $E_F$, à l'emplacement $\mathbf{r}$ du noyau examiné; $\Psi$ est normalisée dans un grand volume $V$. La mesure de $\delta\nu$ renseigne donc sur les densités électroniques en des points bien déterminés du réseau cristallin.

Si, dans une solution solide métallique, la densité des électrons de valence était répartie *uniformément* sur tous les atomes, $|\,\Psi_S(\mathbf{r})\,|^2$ serait indépendante du noyau $\mathbf{r}$ et de la concentration $c$ de l'alliage. Pour une bande de conductibilité parabolique, $x_S$ varierait donc avec $c$ de façon *linéaire* à faibles concentrations

$$\frac{\mathrm{d}x_S}{\mathrm{d}c} = x_{S_0}\frac{d}{\mathrm{d}c}\left(1+\frac{Zc}{p}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{Zx_{S_0}}{3p}, \tag{1}$$

si $x_{S_0}$ est la densité pour la matrice pure, et si la matrice et le soluté (supposé de substitution) ont respectivement $p$ et $p + Z$ électrons de valence par atome.

On sait qu'en fait les atomes de soluté conservent leurs Z charges électroniques supplémentaires à des distances de leurs noyaux de l'ordre des distances interatomiques (*cf.* [2], [3]). Ils laissent donc, à faibles concentrations, une densité électronique *inchangée* dans la majeure partie de la matrice : à grandes distances des atomes de soluté, la variation linéaire de $n_0(E\ )$ avec $c$ est compensée exactement par une variation en sens contraire de $|\,\Psi_S(\mathbf{r})\,|^2$; dans **Cu Zn** par exemple ([1]), $n_0(E_F)$ est plus forte que dans le cuivre pur, mais la fonction d'onde prend une densité plus faible sur les atomes de cuivre que sur ceux de zinc (*cf.* [4]).

D'où, pour la matrice,

$$\frac{\mathrm{d}x_S(\mathbf{r})}{\mathrm{d}c} \to 0 \quad \text{si} \quad c \to 0. \tag{2}$$

*Les atomes de soluté perturbent même si peu la matrice que son $\delta\nu$ ne doit pas changer notablement jusqu'à des concentrations très fortes.*

L'introduction d'atomes de soluté répartis assez régulièrement change en effet la densité au point $\mathbf{r}$ des électrons d'énergie inférieure ou égale au niveau de Fermi de la quantité ([2])

$$n_0(E_F)\frac{Z}{r}\;\frac{qR\,\mathrm{ch}\,q(R-r)-\mathrm{sh}\,q(R-r)}{qR\,\mathrm{ch}\,qR-\mathrm{sh}\,qR}.$$

$r$ est ici la distance du point $\mathbf{r}$ au noyau de soluté le plus rapproché; $\frac{4\pi R^3}{3}$, le volume moyen de l'alliage par atome de soluté; enfin $q$ définit la taille de l'écran autour de l'atome de soluté (*cf.* [3]). Pour une bande parabolique, la densité électronique $x$ *par unités de volume et d'énergie* s'écrit alors

$$\frac{x-x_0}{x_0} = \frac{Z}{2E_F r}\;\frac{qR\,\mathrm{ch}\,q(R-r)-\mathrm{sh}\,q(R-r)}{qR\,\mathrm{ch}\,qR-\mathrm{sh}\,qR}, \tag{3}$$

si $x_0$ est la densité dans la matrice pure.

Avec les valeurs approchées [2],

$$q^2 \simeq 4\pi\, n_0(E_F), \tag{4}$$

la variation relative de $x$ est en général *inférieure* à $10^{-3}$, même à fortes concentrations (50 pour 100) et pour les atomes de la matrice voisins de ceux du soluté. La partie $x_S$ de $x$ à symétrie sphérique autour du noyau considéré est toujours une fraction importante de $x$; sa variation relative n'est donc pas, elle non plus, supérieure à $10^{-3}$. Le déplacement de Knight de la matrice, proportionnel à $x_S$, est donc pratiquement inchangé par l'introduction du soluté.

Ces conclusions permettent d'interpréter les observations faites sur trois solutions solides [1].

([1]) **AB** signifie B dissous dans A.

([2]) Écrite en unités atomiques :

$$e = m = \hbar = 1.$$

1° Dans CuZn, la *position* de la ligne de résonance du cuivre est pratiquement indépendante de la concentration. Dans cet alliage, les atomes de cuivre premiers ou seconds voisins des atomes de zinc donnent une ligne très élargie par l'interaction de leur moment nucléaire quadrupolaire avec les distorsions du réseau. On peut donc seulement affirmer qu'en accord avec (2), les atomes de cuivre situés à grandes distances du zinc ont, dans l'ensemble, la même densité électronique que dans le cuivre pur. Si les électrons de valence avaient une densité uniforme, $\delta\nu$ varierait au contraire de plus de 10 pour 100 d'après (1), dans les limites $0 \leq c \leq 0{,}35$ de la solution solide primaire.

2° Dans AlZn, la ligne de résonance de l'aluminium est trop large pour que l'on puisse affirmer que sa position est indépendante de la concentration; elle a une *intensité* constante aux fortes concentrations. Donc tous les atomes d'aluminium, même ceux voisins des atomes de zinc, donnent le même déplacement de Knight, vraisemblablement le même que dans l'aluminium pur. On calcule effectivement, avec (3), (4) un changement de $\delta\nu$ inférieur à 0,1 pour 100.

3° Pour les alliages TlSn, (3) et (4) donnent une augmentation de $\delta\nu$ inférieure à 0,01 pour 100 pour $c = 0{,}10$. L'augmentation de 30 pour 100 observée entre $c = 0{,}04$ et $c = 0{,}10$ est donc dûe vraisemblablement à un autre phénomène, peut-être un changement de phase.

Il serait intéressant de vérifier l'indépendance de $\delta\nu$ vis-à-vis de la concentration dans des cas plus simples (alliages solides à diagrammes de phases bien connus ou alliages liquides; en particulier, alliages ordonnés ou à moment nucléaire $\frac{1}{2}$, de façon à éliminer l'effet des distorsions élastiques). On ne doit s'attendre à des variations notables de $\delta\nu$ que dans les alliages à grands rayons d'écran, c'est-à-dire pour $Z$ négatif fort (*cf.* [3]) : oxygène dans le cuivre, éléments de transition dans Zn, Al, etc.

Nous avons négligé ici la variation avec la concentration du paramètre moyen de l'alliage. On vérifie facilement qu'en général elle ne change pas $\delta\nu$ de façon appréciable.

L'auteur tient à remercier le Professeur N. Bloembergen pour avoir attiré son attention sur cette question et pour ses critiques pertinentes.

Manuscrit reçu le 31 janvier 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bloembergen N. et Rowland T. J. — *Acta Metallurgica*, 1953, **1**, 731.
Bloembergen N. — *Proc. Phys. Soc.*, 1955.
[2] Mott N. F. et Jones H. — Metals and Alloys, Oxford, 1936.
[3] Friedel J. — *Advances in Physics*, 1954, **3**, 466.
[4] von Laue M. — *Ann. Physik*, 1914, **44**, 1197.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 16, JUIN 1955, PAGE 445.

# QUELQUES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX OBTENUS A L'AIDE DE PLAQUES PHOTOGRAPHIQUES BOMBARDÉES PAR DES NUCLÉONS DE HAUTE ÉNERGIE

Par Jean COMBE,

Laboratoire de Physique Corpusculaire,
Institut de Physique, Faculté des Sciences, Strasbourg.

**Sommaire.** — Nous donnons quelques résultats de l'étude des étoiles produites dans des émulsions photographiques par des nucléons de haute énergie (340 MeV). Nous avons porté principalement notre attention sur les branches énergiques ($E > 30$ MeV) qui sortent de ces étoiles (distribution en énergie, distribution angulaire, nature, etc.). Les résultats sont donnés séparément pour les noyaux légers de l'émulsion (C, N, O) et les noyaux lourds (Ag, Br). Des différences apparaissent dans le comportement de ces deux sortes de noyaux, pouvant s'expliquer par une différence de structure instantanée (cellules $\alpha$ ou autres, dans les noyaux légers; gaz de nucléons dans les noyaux lourds). Sur chaque plaque, nous avons été amené à établir une courbe « nombre de grains-Énergie » pour les protons (jusqu'à des énergies de 340 MeV). Nous avons utilisé pour cela les chocs p-p. Nous donnons également une méthode de mesure précise du facteur de contraction $S$ de l'émulsion ($dS = 0{,}025$).

**Introduction.** — Cette étude a été faite sur des plaques Ilford C 2 et G 5 exposées au synchro-cyclotron de Berkeley. Certaines de ces plaques ont été soumises à des flux de neutrons de 90

et 270 MeV, d'autres à des flux de protons de 90 et 340 MeV. Le faisceau de neutrons (surtout celui de 90 MeV) possédait une assez forte dispersion en énergie. Les protons sont beaucoup plus mono-énergétiques. Leur énergie incidente est dans un cas de $90 \pm 5$ MeV, dans l'autre $340 \pm 1$ MeV.

Fig. 1.

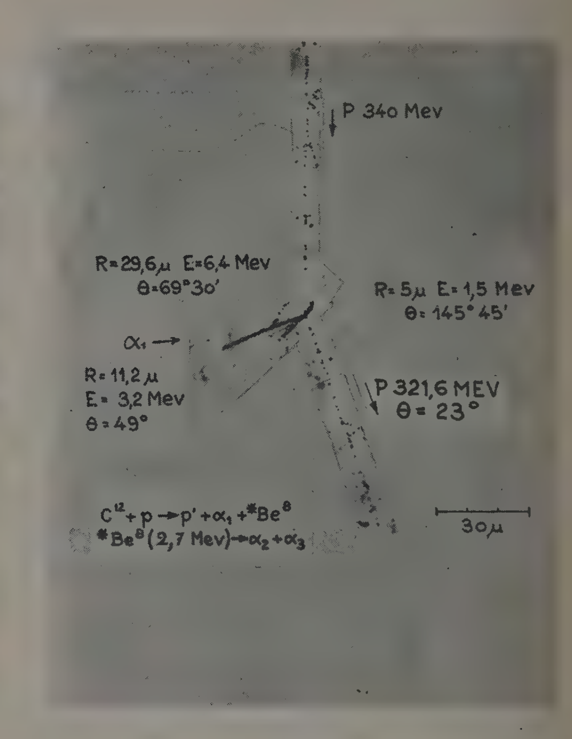



Fig. 2.

La plus grande partie des résultats expérimentaux donnés ici, parce que plus précis, sont obtenus avec des protons de 340 MeV tombant sur des plaques Ilford G 5. Cette étude va se réduire essentiellement à l'analyse des étoiles produites dans l'émulsion photographique par ces protons (*fig.* 1 et 2) et se fera sous les quatre aspects suivants :

1° Étude des branches noires. — Nous appellerons branche noire d'une étoile toute trace d'une particule dont l'énergie est inférieure à 30 MeV. Dans une G 5, on peut dire en gros que toutes ces traces sont continues. Ce sera là le moyen pratique de les reconnaître rapidement. L'expérience et la théorie ont montré que la plus grande partie de ces traces correspond à un processus particulier (évaporation) ayant lieu à l'intérieur du noyau et que, par suite, il est logique d'en faire une étude séparée. Pour un noyau lourd (Ag ou Br), l'évaporation est la dissipation de l'énergie laissée dans le noyau par le proton incident lors de sa traversée du noyau. Ce phénomène peut être convenablement expliqué par le modèle du noyau composé. Pour un noyau léger, le modèle du noyau composé n'est plus applicable faute de nucléons. L'étude des branches noires nous servira surtout, dans cet exposé, à : *a.* fournir une méthode pour distinguer les noyaux lourds des noyaux légers touchés; *b.* évaluer pour les noyaux lourds l'énergie qui a été laissée lors du passage du nucléon incident.

2° Spectre d'énergie des protons énergiques sortants (et le cas échéant des neutrons énergiques sortants). — Tout proton avec $E > 30$ MeV sera considéré comme énergique. Dans une G 5 sa trace est discontinue. Les particules énergiques sont issues d'un processus essentiellement différent de celui de l'évaporation. Elles sont le résultat des transformations subies par le proton lors de son passage à travers le noyau. Branches noires et branches énergiques sont phénoménologiquement distinguées au point de vue nucléaire par la durée du phénomène qui leur donne naissance (sauf peut-être dans certaines désintégrations de noyaux légers).

3° Spectre angulaire des protons sortants. — Ce spectre sera formé des angles de diffusion $\theta$ du proton (angle entre la direction incidente et la direction sortante).

4° Étude de la nature et du nombre de branches énergiques sortantes dans chaque étoile. — Nous pouvons mettre l'ensemble des branches énergiques qui sortent d'une étoile dans un des groupes suivants :

*a*. Groupe (P) : il sort une seule branche énergique de l'étoile et c'est un proton;

*b*. Groupe (PN) : il sort un proton et un neutron énergiques;

*c*. Groupe (PP) ou (3 P) : il sort soit deux protons soit trois protons;

*d*. Groupe (N, 2 N, 3 N) : il sort un ou plusieurs neutrons énergiques, mais il ne nous est pas possible de préciser leur nombre;

*e*. Groupe (Arrêts) : il ne sort aucune branche énergique visible; le proton s'arrête complètement à l'intérieur du noyau.

L'importance de ces différents groupes nous fournira des indications utiles sur la façon dont se fait la traversée du noyau par le proton incident. Toute cette étude ne contient que l'énoncé et la classification des résultats expérimentaux. L'interprétation de ces résultats a fait l'objet de deux articles [1], [2]. Notre but, alors, a été de déterminer les lois qui régissent le passage du nucléon incident à travers le noyau. Ces lois doivent être telles qu'elles nous permettent de retrouver les différents résultats expérimentaux réunis ici.

I. **Évaporation**. — Les branches noires des étoiles produites dans les éléments de la plaque photographique ont été étudiées par de nombreux auteurs [1], [5]. Ici, nous ne recommencerons pas une étude, mais nous nous servirons de propriétés déjà établies dans le but :

1° de faire avec leur aide une distinction entre les étoiles produites dans les noyaux lourds (Ag, Br) et les étoiles produites dans les noyaux légers (C, N, O). Nous pourrons ainsi étudier séparément et comparer les interactions, qui ont lieu dans chacun de ces groupes;

2° de trouver un moyen d'évaluer dans les noyaux lourds l'énergie laissée lors du passage d'un nucléon par le seul examen du nombre $N_h$ de branches noires.

1. Distinction entre les noyaux légers et lourds. — Le critère qui nous a servi dans cette distinction est théorique et a été utilisé pratiquement par Heidmann et Leprince-Ringuet [6]. Il suppose qu'une particule $\alpha$, qui a une énergie plus petite que la barrière de potentiel du Br ne peut sortir, avec une grande probabilité, que d'un noyau léger. Cette méthode de séparation a été employée ensuite par différents auteurs et l'on peut admettre [3] qu'en moyenne et pour des énergies d'excitation pas trop grandes [7] un noyau léger émettra des $\alpha$ ayant un parcours inférieur à 50 $\mu$ ($E < 9$ MeV) et des protons ayant un parcours inférieur à 120 $\mu$ ($E < 4$ MeV). Les particules qui auront des parcours supérieurs à 50 $\mu$ pour les $\alpha$ et à 120 $\mu$ pour les protons seront pratiquement issues de noyaux lourds.

Malheureusement, dans les plaques G 5, il n'est pas possible actuellement de distinguer les $\alpha$ des protons de faible énergie et d'appliquer strictement le critère énoncé. Cependant, cette lacune n'est pas très grave. En effet, l'examen des branches noires des étoiles montre qu'il est possible de ranger presque toutes les étoiles dans deux groupes statistiquement distincts :

*a. Un groupe ne contenant que des étoiles avec des branches dont la longueur est inférieure à* 120 $\mu$. — Nous le considérerons comme étant constitué uniquement de noyaux légers, car il satisfait au critère énoncé. D'ailleurs, une grande partie des branches (60 pour 100 environ) a même une longueur inférieure à 50 $\mu$ : ce sont les particules $\alpha$ qu'il ne nous est pas possible de déceler par l'examen *a priori* de la trace. Ce sont les protons (beaucoup moins nombreux dans les étoiles de noyaux légers) qui donnent les branches jusqu'à 120 $\mu$.

*b. Un autre groupe dans lequel une grande partie des branches (ou la totalité quelquefois) a une longueur nettement supérieure à* 120 $\mu$ *(quelques centaines de* $\mu$ *en moyenne)*. Seules, une, deux ou trois branches au maximum (suivant la grandeur de l'étoile) sont plus petites que 120 et même très souvent que 50 $\mu$. Nous dirons que ces noyaux sont des noyaux lourds. Ils ne paraissent obéir que partiellement au critère énoncé précédemment. Mais il existe plusieurs raisons à cela. Tout d'abord, comme l'a montré expérimentalement Hodgson [7], il y a un abaissement notable de la barrière de potentiel des noyaux lourds pour les grandes énergies d'excitation ($N_h \geq 4$). La hauteur de cette barrière qui, pour une $\alpha$ est environ 11 MeV pour $N_h = 1$, descend à 4 MeV pour $N_h \geq 4$. Ainsi, les premières particules éjectées par un noyau ayant reçu une grande quantité d'énergie pourront être plus courtes. De plus, Le Couteur [5] indique que la dernière particule éjectée par le noyau qui se désexcite peut être très courte. Elle emporte, en effet, l'énergie restant dans le noyau après l'éjection de toutes les autres particules et, dans certains cas, cette énergie peut être inféreure à la barrière de potentiel (sorte de radioactivité). D'ailleurs, pour dissiper ce reste d'énergie (lorsqu'il est plus petit que la barrière de potentiel), il y a compétition entre une émission de protons et de rayonnement $\beta$ ou $\gamma$. Dans ces deux phénomènes, ce seront les protons plus que les $\alpha$ qui seront en cause. En effet, on sait que [3], [5], [8], dans les noyaux lourds, les protons éjectés lors de l'évaporation sont près de quatre fois plus nom-

breux que les α. Nous noterons également que dans le dernier groupe d'étoiles ainsi constitué, on retrouve les étoiles avec des fragments de recul (en général $< 4\,\mu$) et qui sont, comme l'a noté Harding [2], plus fréquents pour les noyaux lourds). La classification ainsi faite n'englobe peut-être pas tous les noyaux lourds et tous les noyaux légers. Mais nous estimons que chaque groupe contient bien ou uniquement des légers ou uniquement des lourds. D'ailleurs, l'importance relative de ces deux groupes, lorsque ce sont des protons de 340 MeV qui produisent les étoiles, se chiffre dans nos premiers résultats par 155 étoiles issues de noyaux légers et 602 étoiles issues de noyaux lourds : ce qui correspond à un pourcentage de 20 pour 100 d'étoiles provenant de noyaux légers et 80 pour 100 d'étoiles provenant de noyaux lourds. Ce résultat est en accord avec l'évaluation de Blau [9] et le calcul théorique tiré de la concentration des émulsions.

2. Relation entre la grandeur de l'étoile et l'énergie incidente. — Nous avons tracé sur les figures 3 et 4 respectivement les spectres des branches noires pour les noyaux lourds et pour les noyaux légers. Nous avons indiqué les spectres obtenus avec les neutrons de 90 et 270 MeV et avec les protons de 90 à 340 MeV. Ils sont comparables aux spectres donnés par d'autres auteurs (qui se rapportent d'ailleurs à l'ensemble : légers+lourds) et qui concernent soit des protons incidents de 350-400 MeV [10], soit des protons de 240 MeV [11]. Les spectres des noyaux légers et des noyaux lourds sont différents :

*Noyaux lourds* (*fig.* 3). — Les étoiles produites

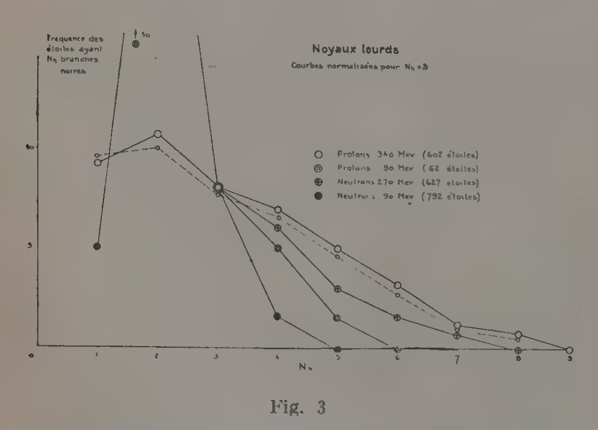



Fig. 3

dans les noyaux lourds ont un nombre de branches qui augmente avec l'énergie du nucléon incident. Nous pouvons alors penser que le nombre de branches d'évaporation augmente avec l'énergie apportée au noyau. En effet, Le Couteur [12], par une étude théorique détaillée de l'évaporation, a montré que le nombre de branches évaporées est proportionnel à l'énergie laissée dans le noyau. Cette proportionnalité existe encore avec les branches visibles seules. Malheureusement, dans une étoile, toutes les branches noires ($E > 30$ MeV) ne sont pas issues du processus d'évaporation. En effet, la distribution angulaire de ces branches n'est pas isotrope dans le système du centre de gravité, comme le voudrait la théorie de l'évaporation, mais contient un certain excès de branches dirigées vers l'avant. 60 à 70 pour 100 de toutes les particules émises le sont vers l'avant. Cette anisotropie garde la même importance quelle que soit la valeur de $N_h$. Hodgson [13] dans le domaine 50-125 MeV et Bernardini [10] à 400 MeV ont obtenu des résultats semblables et ont admis que les particules qui créaient l'anisotropie provenaient de « knock-on », c'est-à-dire de l'un des chocs de la cascade qu'engendrait la particule incidente lors de son passage dans le noyau lourd. Grâce à ces remarques, il nous est alors possible de déterminer statistiquement ce qui revient à l'évaporation et donner par là même une mesure de l'énergie laissée dans le noyau. En effet, si toutes les branches noires étaient des branches d'évaporation, la courbe de la figure 3, relative aux protons de 340 MeV, indiquerait la fréquence avec laquelle se produit une perte d'énergie donnée. Ainsi, on verrait que les plus faibles pertes d'énergie (correspondant à $N_h = 1, 2, 3$) sont les plus fréquentes. Nous allons voir qu'il est possible (à l'aide des indications sur l'anisotropie données précédemment) de corriger cette courbe pour qu'elle nous permette une mesure de l'énergie laissée. Soit $A$ le nombre d'étoiles avec, par exemple), $N_h = 2$; nous avons un nombre $B$ connu d'étoiles où une des branches est un « knock-on » $\left(\frac{B}{A} = 0{,}25\right)$. Donc il n'y a que $A - B$ étoiles qui ont deux branches d'évaporation. D'autre part, parmi les $A'$ étoiles à trois branches noires ($N_h = 3$), nous en avons $B'$ qui ont un « knock-on » et qui sont, en réalité, des étoiles à deux branches d'évaporation ($B'$ est également connu : $\left(\frac{B'}{A'} = 0{,}25\right)$. Finalement, au lieu de $A$ étoiles à deux branches noires, nous avons $A-B+B'$ étoiles à deux branches d'évaporation. Une détermination analogue faite pour chaque valeur de $N_h$ nous permet de construire la courbe pointillée de la figure 3, pour laquelle $N_h$ ne signifie plus : nombre de branches noires, mais nombre de branches d'évaporation ($N_h$ n'aura exceptionnellement cette signification que pour cette courbe). Nous allons déterminer maintenant à quelle énergie moyenne dissipée correspond une branche d'évaporation. Nous utiliserons pour cela les graphiques 1 et 2, figure 11. Sur ce graphique, nous voyons que, au-dessus de $N_h = 6$, il n'y a plus de protons énergiques qui sortent. Nous admettrons donc que les étoiles qui ont sept branches et plus

correspondent à des arrêts du proton incident dans le noyau lourd, et nous dirons alors qu'une branche d'évaporation correspond en moyenne à une énergie dissipée d'environ 50 MeV. Pour préciser le nombre de ces « arrêts », nous utiliserons les remarques faites dans un travail de Le Couteur [14]. Cet auteur étudie théoriquement la fluctuation à laquelle on peut s'attendre sur $N_h$ et donne pour $N_h = 7$ une déviation standard $\sigma \sim 1{,}3$. Nous considérerons donc que les sept étoiles à huit branches figurant dans le graphique 2, figure 11, représentent la fluctuation et nous estimerons à $20 + 14 = 34$ le nombre des étoiles où il y a des arrêts (soit environ 5 pour 100).

*Noyaux légers.* — Pour les étoiles produites dans les noyaux légers (*fig.* 4), nous remarquons que la

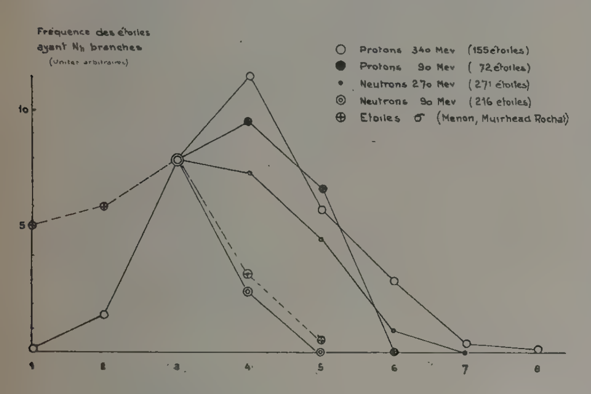



Fig. 4. — Noyaux légers. Courbes normalisées pour $N_h = 3$ (en abscisse valeur de $N_h$).

proportion des étoiles à trois, quatre, cinq branches est à peu près la même pour des protons incidents de 90 MeV et de 340 MeV. A 340 MeV apparaissent seulement quelques étoiles supplémentaires avec $N_h = 5$. En revanche, la nature des branches varie avec l'énergie incidente. Pour des nucléons incidents de basse énergie, les $\alpha$ éjectées sont plus nombreuses (exemple : partage préférentiel de $C^{12}$ en $3\,\alpha$ et de $O^{16}$ en $4\,\alpha$). Lorsque le nucléon incident a une énergie plus grande, le nombre de protons augmente. Yamaguchi [16] a déjà proposé, pour expliquer ce phénomène de l'invariance du nombre des étoiles à trois, quatre et cinq branches avec l'énergie incidente, une explication basée sur l'existence d'une sous-structure $\alpha$ dans un noyau léger comme $C^{12}$ ou $O^{16}$. Ainsi, un noyau léger de carbone recevant une énergie assez faible ($\sim$ 20 MeV) se décomposera en $3\,\alpha$. Le bilan interdit un autre mode de désintégration. Si l'énergie incidente croît, il y aura une particule $\alpha$ qui sera touchée et disloquée

$$C_6^{12} \rightarrow 2\alpha\ (\text{intactes}) + \alpha\ (\text{démembrée en } 2n + 2p).$$

Ainsi, ce mode de désintégration particulier conduira à un nombre constant de branches de quatre pour $C^{12}$ et de cinq pour $O^{16}$. D'une façon plus précise, nous avons relevé pour les deux modes particuliers de désintégrations $(3\,\alpha)$ et $(2\,\alpha + 2\,p)$ du carbone, les résultats suivants (ces résultats sont obtenus dans des plaques Ilford C 2 où il est possible de distinguer entre $\alpha$ et protons) :

— Neutrons incidents de 270 MeV : 66 pour 100 de décompositions $(3\,\alpha)$; 33 pour 100 de décompositions $(2\,\alpha + 2\,p)$;

— Neutrons incidents de 90 MeV : 88 pour 100 de décompositions $(3\,\alpha)$; 12 pour 100 de décompositions $(2\,\alpha + 2\,p)$.

Ainsi apparaîtrait l'augmentation de la fréquence de la cassure d'un $\alpha$ du carbone en $2\,n$ et $2\,p$ lorsque l'énergie du nucléon incident croît. Ceci entraînerait en même temps l'augmentation du nombre de protons sortant des étoiles lorsque l'énergie incidente augmente. Cette augmentation est sensible, en particulier, pour les étoiles à quatre branches noires. Le rapport $\frac{\alpha}{p}$ passe de $2{,}6 \pm 0{,}3$ à 90 MeV, à $1{,}8 \pm 0{,}3$ à 270 MeV. On peut penser que ce sont les désintégrations de $C^{12}$ en $(2\,\alpha + 2\,p)$, qui, étant devenues plus nombreuses à 270 MeV, sont responsables de cette variation. Par ailleurs, Barkas [15] en trouvant pour des protons de 330 MeV tombant sur du carbone un rapport $\frac{\alpha}{p} = 1{,}6$ apporte une preuve supplémentaire du grand nombre de protons qui apparaissent à très haute énergie. Nous noterons égament l'importance de la désintégration $(3\,\alpha + p)$ ou $(3\,\alpha + d)$ qui peut être attribuée à $N^{14}$ et ferait penser à une structure $3\,\alpha + d$ pour ce noyau. Avec des protons incidents de 270 MeV, cette désintégration $(3\,\alpha + p)$ attribuée à $N^{14}$ forme environ 25 pour 100 des étoiles à quatre branches, tandis que $(2\,\alpha + 2\,p)$ du $C^{12}$ en forme environ 35 pour 100 et $(4\alpha)$ de $O^{16}$ environ 25 pour 100. Nous noterons, toutefois, que le spectre obtenu avec des neutrons incidents de 270 MeV diffère légèrement de celui obtenu avec des protons. Et nous pensons que la charge du nucléon incident explique cette faible différence. Un noyau léger ($C^{12}$ par exemple) bombardé par un proton gagne quelquefois une charge (lorsqu'il y a échange de charge et qu'un neutrons énergique ressort, c'est-à-dire dans 20 pour 100 des cas) [17]. Le noyau léger donne alors naissance en moyenne à une branche d'évaporation visible supplémentaire (*voir* chap. IV). Inversement, un neutron incident ressort quelquefois sous forme de proton énergique, le noyau ayant ainsi perdu une charge éjectera une branche visible de moins. De cette manière, dans quelques cas, les étoiles produites par des protons gagnent une branche, tandis que les étoiles produites par des neutrons en perdent une. Le cas des neutrons

incidents de 90 MeV est entièrement différent et semble tout à fait réfractaire à de telles explications. Nous penserons finalement que le spectre d'énergie de ces neutrons est très dégradé et, de ce fait, l'énergie laissée dans le noyau léger par leur passage est en général seulement suffisante pour les décompositions en α (le rapport entre le nombre des trois et quatre branches correspondrait, en gros, à la proportion de $C^{12}$ et de $O^{16}$ dans l'émulsion). Sur la figure 4 nous avons relevé le spectre des étoiles σ donné par Menon, Muirhead et Rochat [3]. Comme l'indique Yamaguchi [16], lorsqu'un méson $\pi^-$ entre dans $C^{12}$ par exemple, une charge + est perdue en même temps qu'une particule α est détruite (si nous supposons une structure α aux noyaux légers). Le noyau qui avait primitivement 3 α aura un état final qui sera 2 α (restées intactes) avec trois neutrons et un proton. On aura donc pour le carbone une étoile à trois branches et pour $O^{16}$ une étoile à quatre branches. Ici encore, le rapport des trois et quatre branches est celui des atomes de $C^{12}$ et $O^{16}$ dans l'émulsion. Dans une G 5, il n'est pas actuellement possible de distinguer entre α et *p* et ainsi nous ne pouvons pas évaluer l'énergie laissée dans un noyau léger, le nombre de branches d'évaporation n'ayant pas une liaison univoque avec l'énergie laissée.

II. **Distribution en énergie des protons énergiques ($E > 30$ MeV) produits dans les noyaux de l'émulsion par des protons incidents de 340 MeV.** — A. Étalonnage de la plaque. — Pour chaque plaque, nous établissons la courbe classique (*fig.* 5) « Nombre de grains-Énergie »

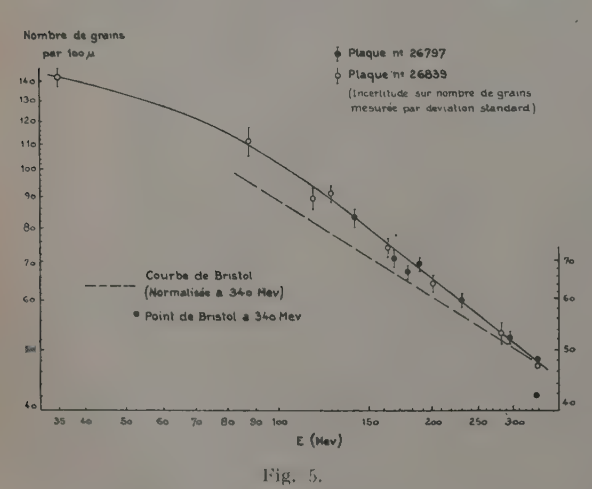



Fig. 5.

relative aux protons. Les différents points de cette courbe sont fournis par : 1° les protons incidents d'énergie = 340 ± 1 MeV; 2° les chocs p-p identifiés (choc du proton incident contre un noyau d'hydrogène de la gélatine), dont le choix judicieux fournit des points répartis sur une gamme d'énergie allant de 80 à 300 MeV; 3° des protons se terminant dans l'émulsion (pour des énergies comprises entre 30 et 80 MeV).

1° Le point de 340 MeV peut être repéré avec une bonne précision, puisqu'il est possible de mesurer un nombre très grand de cellules de l'ordre de 60 μ. En moyenne, sur chaque plaque, nous avons mesuré 1000 cellules (ce qui correspond à une longueur de trace d'environ 6 cm). Nous avons remarqué la distribution gaussienne (1) du nombre de grains des différentes cellules autour d'une valeur moyenne que nous avons prise pour valeur de la « densité de grains » à 340 MeV. Pour deux plaques, nous avons trouvé les résultats suivants :

— Plaque G 5 n° 26.839 : densité de grains par 100 μ : 46,7 ± 0,2;

— Plaque G 5 n° 26.797 : densité de grains par 100 μ : 47,7 ± 0,2.

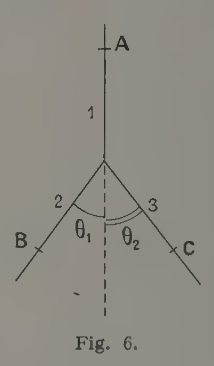



Fig. 6.

Nous avons exprimé la précision par la déviation standard qui se trouve être légèrement inférieure à $\sqrt{N}$ ($N$, nombre de grains). Il apparaît donc une très légère différence, mais significative dans la relation nombre de grains-énergie pour ces deux plaques, qui ont été développées d'une façon identique.

2° Dans un choc p-p (*fig.* 6), les angles de diffusion $\theta_1$ et $\theta_2$, une fois mesurés, nous permettent de calculer, à l'aide des relations du choc élastique dans le cas relativiste, l'énergie des branches 2 et 3.

La mesure du nombre de grains par 100 μ de chacune de ces branches nous permet alors la détermination pour chaque choc p-p de deux nouveaux points de la courbe « Nombre de grains-Énergie ».

*a. Identification des chocs* p-p. — Il faut distinguer les chocs p-p des étoiles n'ayant pas de branches d'évaporation et qui ont deux protons énergiques

(1) Il nous a cependant semblé que cette courbe de Gauss présentait une légère dissymétrie favorisant les cellules à nombre élevé de grains. Toutefois, son importance est statistiquement trop faible pour conduire à une certitude.

sortants. Pour cela, il nous a paru suffisant, pour caractériser un choc p-p, de vérifier que :

— *Les trois branches sont coplanaires* : Cette vérification est réalisée en restituant, à une échelle macroscopique, la position relative des points O et A, B, C (équidistants de O) à l'aide de tiges verticales de hauteur variable dont les extrémités supérieures figurent les points O, A, B et C. On voit alors si ces quatre points sont dans un même plan. Cette coplanéarité peut être également vérifiée en montrant que le produit mixte des vecteurs unitaires portés par les directions OA, OB, OC est nul. La première méthode s'est montrée suffisamment précise. Elle possède l'avantage de fournir une évaluation plus rapide et plus expressive de la non-coplanéarité.

— *Que l'angle des deux branches sortantes* 2 *et* 3 (*fig.* 6) *est celui calculé à partir d'un des angles de diffusion* ($\theta_1$, par exemple). Cet angle qui serait constant (quel que soit $\theta_1$) et égal à 90° dans le cas non relativiste, est légèrement inférieur et variable avec $\theta_1$, dans le cas relativiste que nous devons envisager pour des protons de 340 MeV (par exemple, $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 55° 30'$ et $\theta_1 + \theta_2 = 85° 30'$ au lieu de 90°).

*b. Mesure de* $\theta_1$ (*fig.* 7). — Dans l'émulsion vierge, le proton incident 1 arrive suivant la direction AO ; il est diffusé après le choc en 2 suivant OB. Prenons comme plan d'observation du microscope le plan horizontal $xOy$ et AO dans le plan vertical $xOz$.

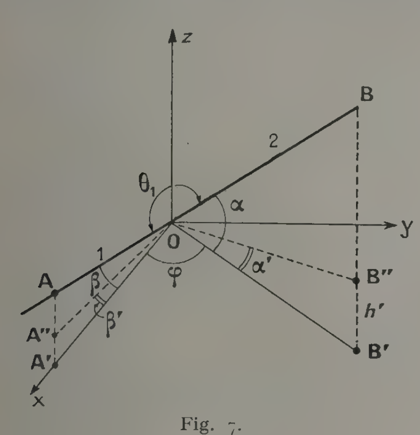



Fig. 7.

Dans la plaque développée que nous examinons il s'est produit, lors du développement une contraction de l'émulsion suivant la direction OZ qui a entraîné un affaissement des traces (AO est venue en A″O et OB en OB″).

Ainsi, dans le microscope, nous mesurons, lors de l'examen de la plaque, des angles d'enfoncement des traces $\alpha'$ et $\beta'$ qui ne sont pas les vrais.

Pour revenir aux angles vrais $\alpha$ et $\beta$, il suffit de connaître le facteur de contraction $S$ de l'émulsion. Ainsi pour $\alpha$, nous avons

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BB'}{a} = \frac{B''B \times S}{a} = \frac{h'S}{a}$$

($B'$ est la projection commune de B et B″ sur $xOy$).

$\varphi$ est l'angle des projections horizontales de 1 et de 2. C'est l'angle des deux branches 1 et 2 telles qu'on les voit dans le microscope. L'angle $\varphi$ n'est pas affecté par la contraction de la plaque.

L'angle $\theta_1$ est lié aux trois angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ par la relation

$$\cos\theta_1 = \cos\alpha\cos\varphi\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta . \qquad (1)$$

En effet, les cosinus directeurs de OA sont

$$\cos\beta, \quad 0, \quad \sin\beta ;$$

ceux de OB

$$\cos\alpha\cos\varphi, \quad \cos\alpha\sin\varphi, \quad \sin\alpha ;$$

$\cos\theta_1$ est égal au produit scalaire des deux vecteurs OA et OB, ce qui donne la relation (1) (*voir* à l'Appendice I une discussion sur les mesures des angles $\alpha$, $\beta$, $\varphi$, $\theta_1$ et sur la précision avec laquelle ils sont déterminés). Comme cela est indiqué dans cette discussion, la mesure de l'énergie du proton diffusé à l'aide de $\theta_1$ est bonne. C'est le nombre de grains par 100 $\mu$ qui supporte la plus grande indétermination, parce que les traces n'ont pas, en général, une longueur suffisante pour permettre une bonne statistique. Sur la figure 5 les points expérimentaux du « Nombre de grains par 100 $\mu$ » sont affectés d'une incertitude exprimée par la déviation standard.

3° Un proton ayant un parcours de 5 500 $\mu$ dans l'émulsion (38 MeV) a permis d'établir un point de la courbe, à basse énergie.

Sur le graphique II.1, nous avons tracé la courbe « Nombre de grains-Énergie » donnée par Bristol (*Phil. Mag.*, 1950, **41**, 413).

B. Spectre d'énergie. — Nous avons à l'aide de la courbe « Nombre de grains-Énergie » mesuré l'énergie des particules rapides ($E > 30$ MeV) sortant des étoiles produites par les protons de 340 MeV dans les plaques G 5 n$^{os}$ 26.839 et 26.797. Nous avons supposé, en première approximation, que toutes les particules énergiques, qui sortaient des étoiles étaient des protons. Il y a aussi des deutons et des tritons énergiques. Il serait possible de les identifier en alliant le comptage de grains à des mesures de « multiple scattering ». Cependant, il y a des raisons de croire [1] que les deutons et les tritons énergiques éjectés, qui sont nombreux pour des énergies incidentes basses (90 MeV, par exemple) deviennent rares à 340 MeV. D'après Heidmann la section efficace pour la production de deutons est proportionnelle à l'inverse de la sixième puissance de l'énergie de la particule incidente. Toutefois, le proton incident, au cours de son passage à

travers le noyau, voit son énergie diminuer jusqu'à des domaines où ce phénomène de production de deutons et de tritons n'est plus négligeable. Et ainsi, la proportion de ces particules s'en trouverait augmentée quelque peu. Environ 1400 étoiles ont été repérées dans les deux plaques. Parmi celles-ci,

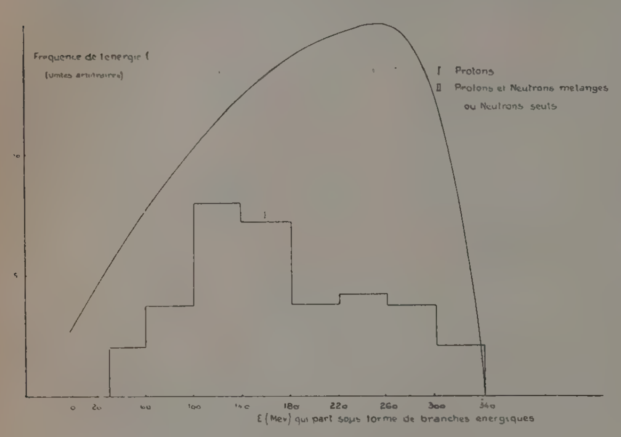



Fig. 8. — Noyaux lourds. Spectre d'énergie.

il y a 816 étoiles qui ont une branche énergique visible, mais seulement 358 étoiles (dont 256 lourds et 102 légers) ont des branches qui peuvent être mesurées. Car nous avons éliminé les traces trop courtes ($< 800\ \mu$) et les traces trop inclinées ($\alpha > 60^o$).

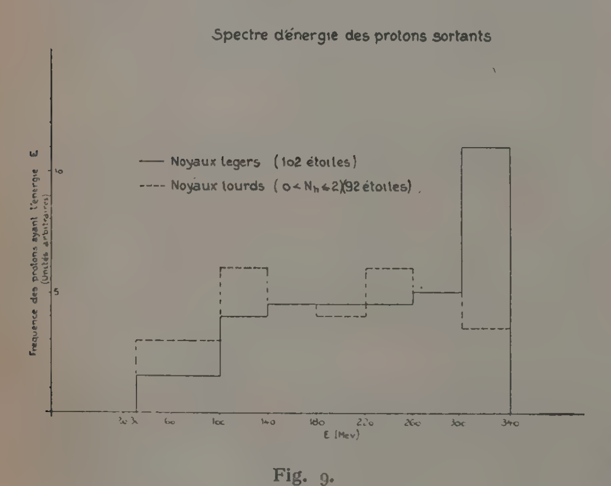


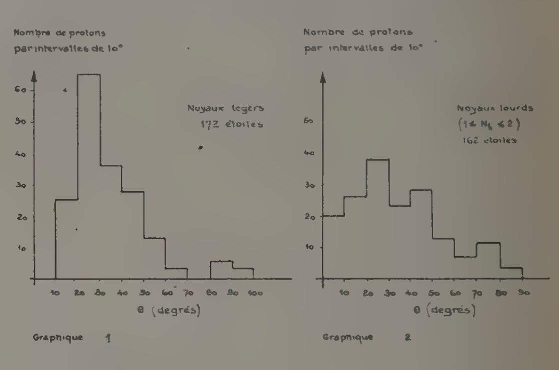

Fig. 9.

Le spectre d'énergie a été établi séparément pour les noyaux lourds (*fig.* 8) et pour les noyaux légers (*fig.* 9). Sur la figure 9, figure également le spectre d'énergie des protons issus de noyaux lourds pour lesquels on a

$$1 \leq N_h \leq 2.$$

Nous voyons sur la figure 9 un pic vers 300-340 MeV pour les protons sortant des noyaux légers. Avec les noyaux lourds où $1 \leq N_h \leq 2$ qui, comme nous le verrons au chapitre IV sont comparables aux noyaux légers au point de vue de l'énergie reçue, nous obtenons une distribution beaucoup plus plate. Cependant, les étoiles avec $N_h = 0$ qui sont évidemment omises, pourraient donner un plus grand nombre de protons énergiques entre 300 et 340 MeV.

III. **Distribution angulaire des protons énergiques sortants.** — Nous avons mesuré l'angle dans l'espace du proton incident et du proton sortant de la façon déjà utilisée et indiquée au 2° du



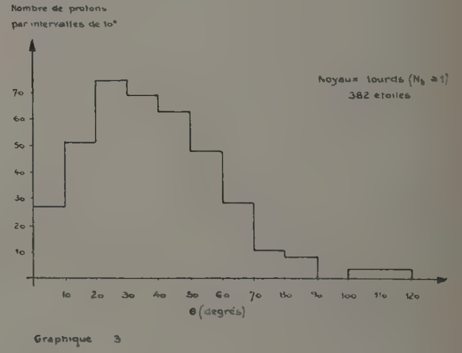




Fig. 10. — Distribution angulaire des protons énergiques sortants.

Chapitre II et à l'Appendice I. Cette distribution angulaire est présentée pour les noyaux légers (graphique 1, *fig* 10), pour les noyaux lourds avec une ou deux branches noires (graphique 2, *fig.* 10) et pour l'ensemble des noyaux lourds ($N_h \leq 1$) (graphique 3, *fig.* 10).

Nous nous attacherons surtout à faire une comparaison entre les graphiques 1 et 2, figure 10.

Comme nous le montrerons au chapitre IV, les noyaux lourds avec $N_h = 1$ ou 2 sont comparables, au point de vue énergie reçue, aux noyaux légers.

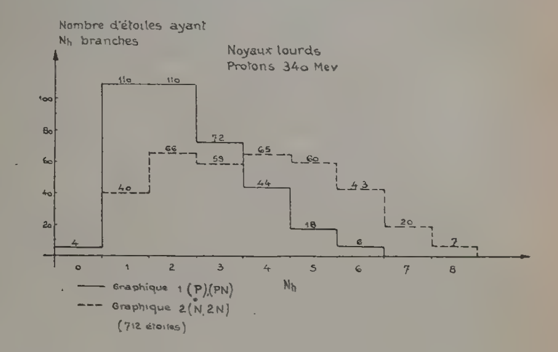
En d'autres termes, le proton incident en traversant les noyaux de chacun de ces groupes a donné un nombre de chocs comparable. Or, il apparaît une différence dans le spectre angulaire de ces deux groupes, qui laisserait prévoir (puisque le nombre des chocs est identique dans les deux cas) l'existence de chocs de nature différente dans les noyaux légers et dans les noyaux lourds. Deux points sont particulièrement nets, lorsque l'on compare les noyaux légers et les noyaux lourds avec une ou deux branches noires.

1° Entre 0 et 10°, il n'y a aucun proton sortant d'un noyau léger alors que pour les noyaux lourds, il en apparaît 14 pour 100 dans le même domaine angulaire.

2° En considérant à la fois l'énergie et l'angle du proton sortant, on voit que pour les noyaux légers, il existe dans le domaine (30°-40°) beaucoup de protons (35 pour 100 environ) qui sortent avec des énergies supérieures à 300 MeV. Pour les noyaux lourds, dans le même domaine angulaire, il n'y a qu'une faible proportion (10 pour 100 environ) de protons sortants, qui ont une énergie supérieure à 300 MeV environ.

Ces résultats peuvent être expliqués par l'existence, dans les noyaux légers, d'une sous-structure qui servirait de cible au proton qui traverse le noyau, alors que, dans les noyaux lourds, le passage se ferait par une cascade de chocs nucléon-nucléon ([17], chap. I). Un nucléon qui rencontre par exemple une particule α et qui est diffusé à un angle de 10° ne perd dans ce choc que 4 MeV. C'est, en général, insuffisant pour produire une étoile; d'où l'explication par ce schéma de l'absence d'étoiles avce proton énergique diffusé entre 0 et 10°. Pour les noyaux lourds, le passage par chocs nucléon-nucléon peut expliquer (à condition de supposer pour les nucléons du noyau une répartition convenable de leurs moments) l'existence de nucléons diffusés aux petits angles après avoir cédé par chocs une énergie suffisante pour produire une étoile. La faible perte d'énergie associée à un angle de diffusion grand est une caractéristique du choc p-α. Ainsi, pour un angle de diffusion de 30°, la perte d'énergie est de 22 MeV; pour 40°, elle est de 35 MeV. Dans les chocs nucléon-nucléon des pertes d'énergie de cet ordre correspondent à des angles de diffusion plus faibles. Par exemple, une perte d'énergie de 20 MeV correspond à un angle de diffusion de 12°. Ainsi s'expliquerait le second point de la différence entre noyaux lourds et légers. On sait expérimentalement et théoriquement que la diffusion élastique n'est importante que pour les plus petits angles de diffusion. C'est donc dans ce domaine qu'apparaissent les différences. Et l'on comprend alors que pour les grands angles de diffusion (> 40°) il n'y ait plus ces distinctions. A ce moment, le passage correspond, dans les deux sortes de noyaux, à une cascade de chocs nucléon-nucléon.

IV. **Pourcentage des groupes (P seul), (PN), (PP), (3P), (N ou NN ou NNN).** — Parmi les étoiles qui ont un proton énergique sortant, il y en a qui émettent en même temps un neutron : groupe (PN), et parmi celles qui n'ont pas de branches énergiques visibles, il y en a une partie où il y a des neutrons énergiques qui sortent : groupe (N ou NN ou NNN) et une autre partie qui correspond à l'arrêt total du proton incident dans le noyau : groupe (Arrêts). Faisons pour les noyaux lourds à 340 MeV le spectre des branches d'évaporation des étoiles qui ont une branche énergique visible (P), (PN) (graphique 1, *fig.* 11) celui des étoiles qui n'en ont pas (N ou NN ou NNN), (Arrêts) (graphique 2, *fig.* 11).



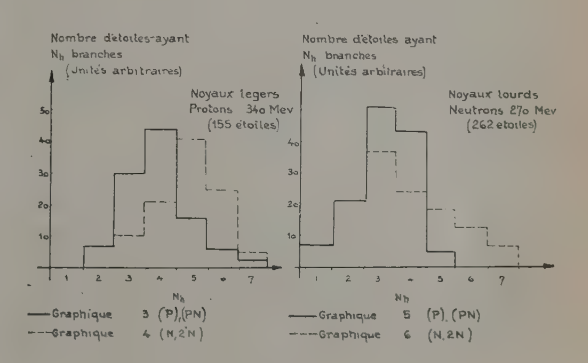




Fig. 11.

*Remarque.* — Un graphique analogue est présenté pour les noyaux légers, qui ont été bombardés par des protons de 340 MeV (graphiques 3, et 4, *fig.* 11). Ces graphiques se rapportent à 155 étoiles. Nous avons également fait, pour les étoiles produites par des neutrons de 270 MeV sur des noyaux lourds d'une plaque G 5, un spectre du nombre de branches d'évaporation (graphique 5 et 6, *fig.* 11). Ces deux derniers graphiques se rapportent à 262 étoiles. Dans le spectre 6, figure 11, on ne peut pas dénombrer

les étoiles à une ou deux branches d'évaporation. Dans le spectre 5, figure 11, on peut reconnaître les étoiles à une ou deux branches d'évaporation.

Considérons les graphiques 1 et 2, figure 11, se rapportant aux étoiles produites dans les noyaux lourds par des protons de 340 MeV. On note entre ces deux spectres deux différences marquantes : *a.* pour le faible nombre de branches noires $N_h = 1$ et 2; *b.* pour les nombres élevés de branches noires, $N_h = 4$ ou 5. Nous savons (chap. I) que l'énergie laissée dans un noyau lourd est proportionnelle au nombre de branches noires. Donc nous pouvons comparer entre elles, d'une part, les étoiles ayant une branche noire, et, d'autre part, celles ayant deux branches noires et dire qu'elles ont reçu la même quantité d'énergie en moyenne. Ceci est vrai, si l'on admet que l'apport d'une charge supplémentaire (graphique 2, *fig.* 11) pour la même quantité d'énergie reçue ne modifie pas le nombre de branches d'évaporation. On peut le justifier à l'aide des calculs de Le Couteur (*voir* [5], chap. I), par exemple. Cet auteur montre dans l'étude de l'évaporation, l'influence de l'excès de neutrons du noyau lourd sur la probabilité de l'émission de telle ou telle particule chargée. Mais, cet effet de l'excès de neutrons n'est d'une importance appréciable que lorsqu'il est de l'ordre de 10 environ. Or, l'apport d'une charge unité ne le fera varier que de deux unités et par suite sera pratiquement sans effet sur le mode de désexcitation. Pour les noyaux légers, il n'en est pas de même. Tout d'abord, le nombre de branches d'évaporation ne peut pas servir à déterminer l'énergie laissée au noyau (*voir* chap. I). D'autre part, l'apport d'une charge se traduit en moyenne pas l'éjection d'une particule chargée supplémentaire. Ceci peut être vu sur les spectres 3 et 4, figure 11, qui coïncident si l'on déplace le spectre 3, d'un rang vers la droite. Ces étoiles avec $N_h = 1$ ou 2, représentent aussi les noyaux qui ont reçu le moins d'énergie et de ce fait, nous les rapprocherons (au point de vue énergie reçue) des noyaux légers. La comparaison entre ces noyaux lourds qui ont reçu peu d'énergie et les noyaux légers nous conduit au tableau suivant (tableau I) pour la classification des branches énergiques sortantes d'après leur nature.

TABLEAU I.

*Pourcentage des différents groupes* (P), ... (2P). *trouvés à la sortie de chaque étoile.*

| | P. | N, 2N ou 3N. | PP. | 3P. | Arrêts. |
|---|---|---|---|---|---|
| Noyaux lourds avec $1 \leq N_h \leq 2$ (326 étoiles). | $52 \pm 4$ | 25 | 21 | 2 | 0 |
| Noyaux légers avec $N_h \geq 1$ (277 étoiles). | $67 \pm 4$ | 16,5 | 16,5 | 5 | 0 |

*Remarque.* — *a.* Nous supposons qu'il y a une quantité négligeable d'arrêts dans les noyaux légers (au maximum $O^{16} \rightarrow 8\,P + 8\,N$, soit 220 MeV environ). *b.* Nous n'avons pas noté dans le tableau I les étoiles avec $N_h = 0$. Le groupe (N, NN, 3N) avec $N_h = 0$ se révèle au microscope comme un arrêt du proton au sein de l'émulsion. Un tel phénomène est difficile à déceler dans le « scanning » par champ, mais se voit très bien dans le « scanning » par trace. Perry [1] en faisant un « scanning » par trace trouve 10 arrêts de la trace pour 198 étoiles (c'est une faible proportion). Ce phénomène correspond à une interaction de faible énergie (pas de branches d'évaporation) dans un léger ou un lourd avec éjection de un ou plusieurs neutrons énergiques.

Les groupes (P) ou (PN) avec $N_h = 0$ peuvent être confondus avec un scattering. Seuls, les groupes (PP) et (3P) avec $N_h = 0$ sont facilement repérables. Mais il est impossible de dire si l'interaction a eu lieu dans un lourd ou dans un léger. Les groupes PP avec $N_h = 0$ peuvent, en effet, exister pour un noyau léger. Chamberlain et Segré [2] citent l'expérience du lithium bombardé avec des protons de 350 MeV, d'où il sort des groupes de deux protons sensiblement à 90° l'un de l'autre suivant la réaction

$$H_1^1 + Li_3^7 \rightarrow 2\,H_1^1 + He_2^6.$$

Ce sont les deux protons issus d'un choc direct du proton incident contre un proton du lithium.

Pour un noyau lourd, leur probabilité paraît aussi très grande puisque celui-ci peut dissiper jusqu'à 50 MeV sans émettre de branches noires.

Le tableau I nous montre une différence dans la répartition des groupes (P), (N, 2N), ... pour les noyaux lourds et les noyaux légers.

Cette différence a été analysée par la méthode de Monte-Carlo [2], introduction) et peut s'expliquer en supposant pour les noyaux légers l'existence d'une sous-structure, alors que pour les noyaux lourds, le passage du nucléon incident se fait par une cascade de chocs nucléon-nuléon.

Dans le tableau II est donnée la répartition des groupes (P), (N, 2N), ... pour l'ensemble des noyaux lourds. Dans ce tableau nous avons séparé d'une façon statistique les groupes P et PN. Nous avons utilisé pour cela le fait que les branches noires peuvent servir à mesurer l'énergie laissée dans le noyau. Nous avons alors : énergie du neutron = 340 MeV — (énergie laissée dans le noyau + énergie du proton sortant). Ces résultats sont en bon accord avec ceux donnés par Bernardini pour des protons de 350-400 MeV et concernant l'ensemble des noyaux de la plaque. Pour l'ensemble des noyaux lourds, on a une moyenne de trois branches d'évaporation visibles par étoiles (en comptant les étoiles avec $N_h \leq 1$), ce qui correspondrait à une moyenne de 150 MeV environ laissée dans un noyau d'argent ou de brome par un proton de 340 MeV.

Pour les noyaux légers à 340 MeV, on trouve quatre branches d'évaporation en moyenne. Pour les étoiles produites par les protons de 90 MeV :

— pour les noyaux légers : 3,7 branches en moyenne;

— pour les noyaux lourds : 2,2 branches en moyenne.

Tableau II.

*Pourcentage des différents groupes* (P), (PN), ... *trouvés à la sortie de chaque étoile* ($E \geq 30$ MeV).

| | P. | PN. | N, 2N ou 3N. | Arrêts. | 2P. | 3P. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Noyaux lourds avec $N_h \geq 1$ (602 étoiles). | 27 | 19 | 38 | 5 | 10 | 1 |
| Noyaux légers + noyaux lourds $N_h \geq 1$ (757 étoiles). | 51,2±2 | | 38,7±2,5 | | 9,4±1 | 0,7±0,3 |
| Résultats donnés par Bernardini 400 MeV ([9], Chap. I), Branches de $E > 30$ MeV. | 54,4±4 | | 35±3 | | 9±2 | 1,7±0,7 |

**Conclusion**. — Nous avons vu dans cette étude que les noyaux lourds et les noyaux légers de l'émulsion, donnent des interactions différentes lorsqu'ils sont bombardés par des protons de 340 MeV. Cette différence apparaît déjà dans l'analyse des branches noires (évaporation); ensuite pour la distribution angulaire et pour les distributions des protons énergiques émis. Finalement, elle se détecte également dans la nature des particules énergiques qui sortent des noyaux. Tous ces résultats permettent déjà de penser, pour les expliquer, à une sous-structure existant dans les noyaux légers de l'émulsion. L'étude plus précise faite par la méthode de Monte-Carlo confirme cette hypothèse (*voir* deuxième partie à publier dans ce *Journal*).

L'ensemble de ce travail a été effectué dans le Laboratoire de Physique Corpusculaire que dirige M. le Professeur P. Cüer à qui je tiens à exprimer ici ma très vive reconnaissance. Je remercie également M. le Professeur Barkas, de Berkeley, de m'avoir fourni les plaques photographiques qui m'ont servi dans ce travail. Je remercie enfin Mlle Martzolf, mesureuse, qui a dépouillé les plaques. Ce travail a été accompli avec l'aide matérielle très précieuse du Commissariat de l'énergie atomique.

## APPENDICE I.

**Précision obtenue sur la mesure de $\theta_1$.** — Cette précision est liée à la précision avec laquelle on mesure $\alpha$, $\beta$ et $\varphi$ (voir *fig.* 7).

Mesure de $\alpha$. — Elle nécessite la connaissance de la longueur $OB' = a$, de la différence de cote $BB' = h'S$ entre O et B dans l'émulsion développée et du facteur de contraction $S$. $\alpha$ est donné par la relation

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h'S}{a}. \tag{1}$$

Par différentiation de la formule (1), nous obtenons une expression de la limite supérieure de l'erreur $d\alpha$; toutefois, nous prenons soin de mettre le signe + devant tous les termes partiels qui composent cette expression, puisque les erreurs $dh'$, $dS$ et $d\alpha$ sont indépendantes. Nous avons, alors

$$(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\,d\alpha = S\frac{dh'}{a} + \frac{h'\,dS}{a} + \frac{h'S}{a^2}\,da \tag{2}$$

qui, à l'aide de (1) se transforme en

$$d\alpha = S\frac{dh'}{a}\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\,\frac{dS}{S}\sin^2\alpha + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\,\frac{da}{a}. \tag{3}$$

Le terme $S\frac{dh'}{a}$ est lié à l'optique utilisée par le rapport $\frac{dh'}{a}$. En effet, les cotes de O et de B sont reprérées avec une exactitude qui dépend de la latitude de mise au point du microscope. Cette latitude est d'autant plus faible que l'optique est plus forte. Toutefois, l'utilisation d'une forte optique n'est pas indispensable, car si elle permet une mesure plus précise de BB' (correspondant à un $dh'$ plus petit), elle diminue la longueur $a$ visible dans un champ.

D'ailleurs, la grandeur $dh'$ ne peut pas être rendue aussi petite que le permet la précision du pointé d'une forte optique (par exemple, oculaire 12 × et objectif 1/15e du microscope Stiassnie : grossissement 1700), car la lecture des déplacements, sur la vis de réglage fin de la mise au point, ne se fait pas avec une précision suffisante (on peut difficilement évaluer le 1/4 de micron). Et finalement, une optique plus faible (oculaire 4, objectif 1/10e : grossissement 430) donne un rapport $\frac{dh'}{a}$ qui a sensiblement la même valeur que lorsqu'on utilise un grossissement plus fort. Une autre source d'erreur, difficile à éliminer, vient encore diminuer les avantages d'une forte optique. Les pointés de O et de B' se font en mettant au point sur des grains composant la trace (ou même souvent sur un point particulier du grain, lorsque celui-ci est gros). Or, tous les

grains d'une trace ne sont pas rigoureusement alignés, mais répartis tout autour d'une direction moyenne. Ainsi, d'un grain à l'autre, on trouve, pour une même longueur $a$, une légère variation dans la différence de cote BB′. Cette cause d'erreur sera atténuée si l'on fait plusieurs mesures de BB′ en prenant soin de faire varier les positions de O et B′ en pointant à chaque expérience des grains différents.

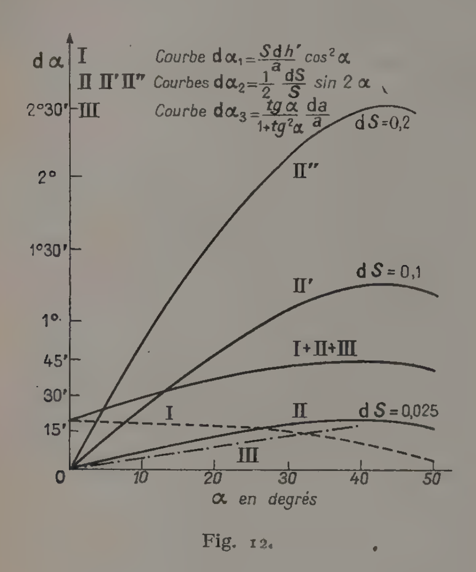



Fig. 12.

Nous donnons sur le graphique (*fig.* 12) la contribution à l'erreur globale apportée par le terme $\frac{S\,dh'}{a}\cos^2\alpha$ (courbe I). Pour cette courbe,

$$dh' = 0,3\,\mu, \qquad S = 2,3, \qquad a = 140\,\mu.$$

Nous noterons que ce terme est maximum pour les petits angles α. Le terme $\frac{1}{2}\frac{dS}{S}\sin 2\alpha$ est lié au facteur de contraction $S$. Celui-ci est approximativement égal à 2,5 pour une plaque Ilford G 5. Mais diverses conditions, en particulier le degré d'humidité de l'émulsion, sont susceptibles de le faire varier dans de larges proportions. Cette variation peut atteindre 25 pour 100 lorsque le degré d'humidité relative passe de 50 à 100 pour 100 [1]. Nous avons d'ailleurs vérifié sur nos plaques développées l'existence de telles variations. Nous avons mesuré le facteur de contraction de nos plaques en nous servant des branches de 47 μ du ThC′ qui existe avec tous les corps de la famille du Th sous forme d'impureté radioactive dans la gélatine. L'étude faite sur environ 50 traces donne pour $S$ des valeurs allant de 2,2 à 2,9. Ce résultat peut s'expliquer par le fait que ces particules α du Th$C'$ qui ont été émises durant la période de sensibilité de la plaque l'ont été à des moments où l'humidité de l'émulsion était différente. Nous pouvons même ajouter que la plaque vierge est passée durant son existence par des degrés d'humidité relative allant de 50 à 100 pour 100. Après ces constatations, il apparaît donc indispensable de connaître soit le degré d'humidité de l'émulsion, soit ce qui est encore préférable, la valeur exacte de $S$, au moment de l'exposition aux protons. Sinon le terme $\frac{1}{2}\frac{dS}{S}\sin 2\alpha$, à cause de la grande valeur de d$S$, interdira toute mesure précise de α (*fig.* 12, courbes II, II′, II″). Une détermination directe de $S$ est possible, en utilisant uniquement la plaque développée, grâce à l'étude des chocs p-p. Nous avons vu que pour identifier un choc p-p, il est nécessaire de vérifier les deux conditions indépendantes : *a.* Coplanéarité des trois branches; *b.* Angle mesuré des deux protons après le choc égal à celui calculé à partir d'un des angles de diffusion (*voir* chap. II, A, 2°). Il existe, compte tenu des erreurs de mesure, un domaine des valeurs de $S$ qui vérifie le mieux ces deux conditions et qui définit de ce fait la valeur du facteur de contraction de la plaque étudiée. Nous avons trouvé que $S$ est compris entre 2,25 et 2,3 et qu'il a la même valeur pour les deux plaques G5 dépouillées. Nous noterons également que lors de l'étude de quelques étoiles de décomposition du carbone en trois particules α par des protons de 340 MeV, nous avons remarqué que ce sont aussi ces valeurs de $S$ qui assurent le mieux la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement dans cette désintégration. La courbe II du graphique (*fig.* 12) donne la limite supérieure de l'erreur exprimée par le terme $\frac{1}{2}\frac{dS}{S}\sin 2\alpha$, si l'on utilise la valeur de $S$ ainsi déterminée ($dS = 0,025$). Les courbes II, II′, II″ montrent que la précision dans la mesure d'angles α petits est beaucoup moins affectée par une incertitude sur $S$. Aussi avons-nous choisi de préférence pour l'établissement de la courbe « Nombre de grains-Énergie » des chocs p-p dont les branches étaient les plus horizontales possible. Dans ce cas apparaît encore un autre avantage : les traces horizontales sont, en général, plus longues, permettant ainsi une meilleure évaluation du nombre de grains par 100 μ. Le troisième terme $\frac{tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}\frac{da}{a}$ exprime la contribution à l'erreur totale apportée par la mesure de la longueur $a$. La longueur $a$ est la distance qui sépare O de B (*fig.* 7). Pratiquement, pour faire une mesure plus précise, nous prenons pour définir O et B′, des grains qui coïncident exactement avec une division de l'échelle oculaire. Avec une optique assez faible (grossissement 430) nous pouvons mesurer cette longueur (140 μ en moyenne) avec une précision de 1 μ. L'erreur de 1 μ est due presque uniquement aux dimensions des grains qui définissent les points O et B′. La courbe III montre la valeur de ce troisième terme en fonction de l'angle α mesuré.

MESURE DE $\beta$. — Elle est absolument identique à celle de $\alpha$. La précision sera meilleure d'une façon générale, car $\beta$ est petit (courbes I + II + III). Les protons incidents ont une inclinaison constante sur l'horizontale voisine de 10°.

MESURE DE $\varphi$. — Dans ce cas, la mesure est plus directe. Nous nous servons pour faire cette mesure d'un goniomètre précis qui, complété par un vernier, permet d'évaluer la demi-minute. En réalité, la précision obtenue dans notre mesure est beaucoup moins grande. Deux difficultés viennent la diminuer : tout d'abord, les traces O$x$ et OB (*fig.* 7) ne sont pas des lignes droites idéales; la disposition des grains qui sont éparpillés de part et d'autre d'une direction moyenne rend les trajectoires légèrement sinueuses. D'autre part, l'expérience montre que l'œil ne peut évaluer la superposition d'un fil du réticule et de la trace à mieux que quelques minutes près.

Après avoir fait plusieurs mesures du même angle, nous estimons que nous pouvons déterminer sa valeur environ à 15′ près. $\theta_1$ est calculé par la formule (1) du chapitre II.

Par différentiation de cette formule, nous obtenons l'expression suivante pour la limite supérieure de l'erreur $d\theta_1$

$$\begin{aligned} \sin\theta_1\, d\theta_1 = {} & |\sin\alpha\cos\varphi\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta|\, d\alpha \\ & + |\cos\alpha\cos\varphi\sin\varphi - \sin\alpha\cos\beta|\, d\beta \\ & + |\cos\alpha\cos\beta\sin\varphi|\, d\varphi. \end{aligned}$$

L'étude de cette expression, pour les chocs p-p sélectionnés que nous utilisons ($\alpha$ petit, $\beta$ petit, $\varphi$ quelconque de 0 à 90°) nous permet de conclure que $d\theta_1$ est toujours inférieur à 1°. Une incertitude de 1° sur la valeur de $\theta_1$ conduit à une erreur de 5 MeV dans la détermination de l'énergie du proton diffusé. Lorsque nous mesurons des angles $\theta_1$, pour lesquels $\alpha$ est plus grand (cas de la détermination du spectre de la distribution angulaire des branches énergiques visibles, chap. III, où $\alpha$ peut atteindre 60°) $d\theta_1$ augmente, mais reste cependant toujours inférieur à 1°30′.

Manuscrit reçu le 4 décembre 1954.

## BIBLIOGRAPHIE.


INTRODUCTION.

[1] CÜER P. et COMBE J. — *C. R. Acad. Sc.*, 1954, **238**, 1799.
[2] CÜER P. et COMBE J. — *C. R. Acad. Sc.*, 1954, **239**, 351.

CHAPITRE I.

[1] BERNARDINI G., CORTINI G. et MANFREDINI A. — *Phys. Rev.*, 1950, **79**, 952.
[2] HARDING J. B. — *Phil. Mag.*, 1949, **40**, 530.
[3] MENON M. G. K., MUIRHEAD H. et ROCHAT O. — *Phil. Mag.*, 1950, **41**, 583.
[4] PERKINS D. H. — *Phil. Mag.*, 1949, **40**, 601.
[5] LE COUTEUR K. J. — *Proc. Phys. Soc.* — 1950, **63** A, 259.
[6] HEIDMANN J. et LEPRINCE-RINGUET L. — *C. R. Acad. Sc.*, 1948, **226**, 1716.
[7] HODGSON P. E. — *Phil. Mag.*, 1952, **43**, 934.
[8] PAGE N. — *Proc. Phys. Soc.*, 1950, **63** A, 250.
[9] BLAU M. et OLIVER A. R. — *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1952, **27**, nos 3, 6.
[10] BERNARDINI G., BOOTH E. T. et LINDENBAUM S. J. — *Phys. Rev.*, 1952, **85**, 826.
[11] FISHMAN H. et PERRY A. M. — *Phys. Rev.*, 1952, **86**, 167.
[12] LE COUTEUR K. J. — *Proc. Phys. Soc.*, 1950, **63** A, 498.
[13] HODGSON P. E. — *Phil. Mag.*, 1953, **44**, 1113.
[14] LE COUTEUR K. J. — *Proc. Phys. Soc.*, 1952, **65** A, 718.
[15] BARKAS W. H. et BOWKER J. K. — *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1952, **27**, nos 3, 31.
[16] YAMAGUCHI Y. — *Progr. Theor. Phys.*, **5**, p. 896, 1950.
[17] CÜER P. et COMBE J. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 82.

CHAPITRE II.

[1] HEIDMANN J. — *Phys. Rev.*, 1950, **80**, 171.

CHAPITRE IV.

[1] PERRY A. M. Jr. — *Phys. Rev.*, 1952, **85**, 497.
[2] CHAMBERLAIN O. et SEGRÉ E. — *Phys. Rev.*, 1952, **87**, 81.

APPENDICE.

[1] BRAUN H. — *J. Physique Rad.*, 1952, **13**, 347.

# DÉSINTÉGRATION DE $^{153}_{62}$Sm

Par Mme N. MARTY,
Laboratoire de Physique et Chimie nucléaires du Collège de France.

**Sommaire.** — Le spectre β de $^{153}$Sm est décomposé en trois spectres d'énergies maxima : 820 + 10 keV (20 pour 100), 720 ± 15 keV (40 pour 100), 650 ± 15 keV (40 pour 100). On mesure les coefficients de conversion du γ de 103 keV $\left(\alpha_K = 1{,}2 \pm 0{,}1,\ \frac{K}{L} = 6{,}2 \pm 0{,}3;\ \frac{L}{M} = 4{,}5\right)$. On confirme l'existence de γ de 545 et 172 keV d'intensité inférieure à 1 pour 100 et l'on met en évidence par ses raies de conversion un γ faible de 84 keV. Un schéma de désintégration cohérent est donné.

**Introduction.** — $^{153}$Sm de période 47 h se désintègre par émission β pour donner $^{153}$Eu. Le spin, le moment magnétique et le moment quadrupolaire de l'état fondamental de ce noyau ont été mesurés [1] $\left(I = \frac{5}{2};\ \mu = +1{,}5;\ Q = +2{,}5\right)$; ces valeurs du spin et du moment magnétique constituent l'une des premières exceptions notées au modèle à particules individuelles de Jensen-Mayer [2].

Un très grand nombre de travaux ont porté sur la désintégration de $^{153}$Sm [3] indiquant l'existence d'un spectre β de 800 keV, sans doute complexe, de rayonnements γ de 69 et 103 keV émis en cascade ainsi que d'un photon de faible intensité de 520 keV; d'autres photons (580 et 610 keV) faibles avaient aussi été signalés. Des valeurs très différentes ont été données pour les coefficients de conversion des γ de 69 et 103 keV montrant que ces photons étaient sans doute soit des transitions $M1$, soit des mélanges $M1, E2$. La période du γ de 69 keV était mesurée et trouvée égale à $3 \cdot 10^{-9}$ s [4].

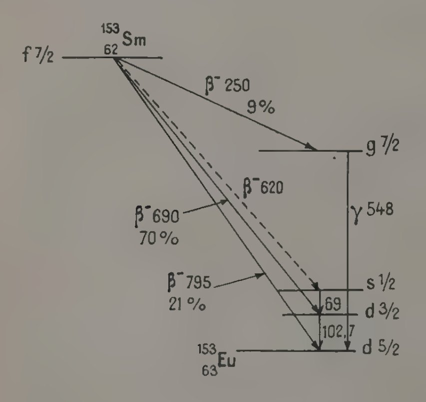



Fig. 1. — Schéma de désintégration de $^{153}$Sm (énergies en keV).

Plus récemment, Mc Gowan [5], par des mesures en coïncidence entre le rayonnement γ d'une des transitions et les rayons γ et X correspondant à l'autre transition, a pu mesurer les coefficients de conversion des photons de 69 keV (3,8 ± 0,2) et 103 keV (1,14 ± 0,2).

Lee et Katz [6], lors d'une étude par spectrométrie β signalaient, en plus, l'existence de raies de conversions $K$ et $L$ correspondant à une transition de 548 keV et aboutissaient au schéma de la figure 1. Enfin, Graham et Walker [7], par coïncidences entre spectres β et raies de conversion à l'aide d'un double spectromètre β donnaient les résultats suivants : trois spectres de 810 ± 10 keV (environ 20 pour 100), 710 + 15 keV (50 pour 100), 640 + 15 keV (30 pour 100); ils mesuraient par une méthode analogue à celle de Mc Gowan les coefficients de conversion du γ de 69 keV ($\alpha_K \doteq 5{,}7 + 1$) et les périodes des photons de 103 et 69 keV, ils signalaient aussi des photons faibles de 520 et 170 keV.

Tout dernièrement, par excitation coulombienne, on a mis en évidence, dans $^{153}$Eu, l'existence de niveaux à 84 et 194 keV [8], [9].

Les derniers travaux cités ont paru pendant que cette étude était en cours; il nous a de plus semblé utile de préciser certains points relatifs au schéma de niveaux de $^{153}$Eu qui ne sont pas encore bien établis. Une partie de ces résultats a déjà été publiée [10].

**Préparation des sources.** — Les sources ont été préparées par irradiation en neutrons lents d'oxyde de samarium $Sm_2O_3$ à la pile de Châtillon; les sources à très grande activité spécifique ont été irradiées à la pile $P_2$ de Saclay. L'oxyde était émulsionné dans du LC 600 avec lequel on formait une feuille mince (environ 100 μg/cm²) par dépôt d'une goutte sur l'eau. Une vérification au microscope a montré que les grains d'environ 15 μ de diamètre ne formaient pas d'amas dans les feuilles minces. La source découpée à la dimension voulue (2 à 5 mm de diamètre) était alors incorporée à une feuille fraîche de LC 600.

**Étude des rayonnements γ.** — Les mesures ont été faites à l'aide d'un spectromètre à scintillation. La figure 2 représente le spectre ainsi obtenu, la source étant à 3 mm du cristal : on y distingue

la raie X de $^{153}$Eu de 40 keV, accompagnant la conversion interne des différents $\gamma$, les photons $\gamma_1$ de 70 keV et $\gamma_2$ de 103 keV, ainsi qu'un $\gamma$ faible d'environ 540 keV, son intensité par rapport à celle du $\gamma$ de 103 keV, compte tenu de l'efficacité relative du cristal scintillateur pour les énergies de 540 et 103 keV, de l'absorption du $\gamma$ de 103 keV dans l'aluminium et le plexiglass servant à absorber les rayons $\beta$, ainsi que du pic de fuite du $\gamma$ de 103 keV peut être évaluée à

$$7 \text{ pour } 1000 \leq \frac{I_\gamma 545}{I_\gamma 103} \leq 1 \text{ pour } 100.$$

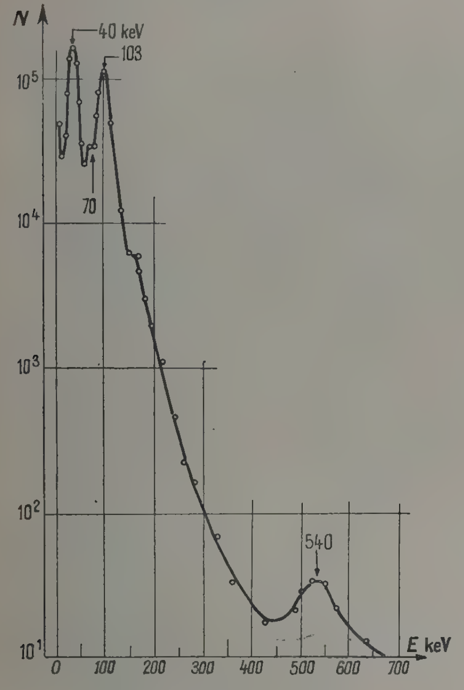



Fig. 2. — Spectre $\gamma$ de $^{153}$Sm.

Des mesures plus précises de l'énergie du photon par comparaison avec les photons d'annihilation, faites avec des sources très intenses en absorbant les $\gamma$ de 103 keV par des écrans de Pb ont donné la valeur de $545 \pm 5$ keV.

On a vérifié, pendant la durée de quatre périodes, que le rapport des intensités des $\gamma$ de 103 et 545 keV restait constant.

On note aussi une raie faible de 170 keV due à l'addition des $\gamma$ de 103 et 69 keV. Des mesures faites avec une distance source-cristal de 1 cm, où aucune raie n'apparaît, fixent la limite du rapport des intensités des photons de 170 et 103 keV comme inférieure à 2 pour 100. Nous avons pu confirmer l'existence du photon faible de 172 keV signalé par Graham et Walker [7] : les mesures ont été faites après absorption des $\gamma$ de 103 keV à l'aide de 3 mm de Cd avec des distances source-cristal de 5, 15 et 25 mm de façon à éliminer l'addition des $\gamma$ de 103 et 70 keV. La figure 3 représente les courbes ainsi obtenues ramenées à une même intensité pour la raie de 103 keV.

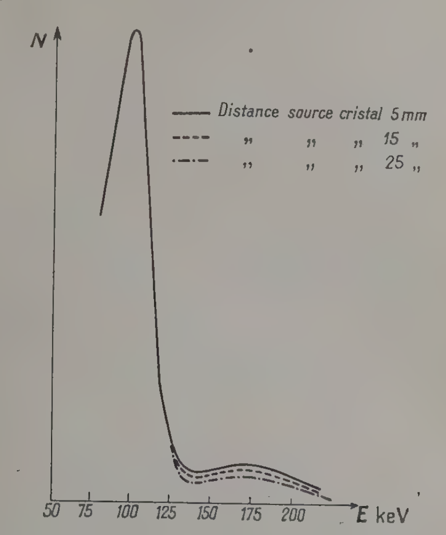



Fig. 3. — Raie $\gamma$ de 172 keV mise en évidence après interposition d'un absorbant de 3 mm de Cd.

Le recherche des rayonnements en coïncidence avec les photons de 545 keV montre que celui-ci est en coïncidence seulement avec le $\gamma$ de 103 keV.

**Étude du spectre** $\beta$. — L'étude a été faite à l'aide d'un spectromètre $\beta$ Slätis Siegbahn à image intermédiaire, avec un pouvoir de résolution de 2 pour 100; le spectre ainsi obtenu est représenté figure 4. Une décomposition par la méthode des droites de Fermi donne trois spectres d'énergie maxima $820 \pm 10$ keV (22 pour 100), $720 \pm 15$ keV (35 pour 100), $650 \pm 15$ keV (43 pour 100). Une telle décomposition dans le cas de spectres d'énergies maxima très voisines est imprécise en raison du peu de points à partir desquels doivent être tracées les droites de Fermi. Pour vérifier le schéma donné pour les premiers niveaux de $^{153}$Eu et tenter une décomposition plus précise des spectres 2 et 3, des mesures de la forme du spectre $\beta$ en coïncidence avec le photon de 103 keV ont été faites à l'aide d'un spectromètre à scintillation dont le cristal était monté à l'arrière de la source mise en place dans le spectromètre $\beta$ [11]. Plusieurs séries de mesures faites avec des pouvoirs de résolution de 3 et 5 pour 100 ont confirmé, en coïncidences avec le photon de 103 keV deux spectres d'énergie $715 \pm 15$ keV ($50 \pm 10$ pour 100) et $640 \pm 15$ keV ($50 \pm 10$ pour 100). Les valeurs de $\log ft$ que l'on peut déduire des énergies maxima et des intensités

partielles sont comprises entre 7,4 et 6,5 et correspondent toutes à des transitions interdites du premier ordre $\Delta J = 0, 1$ oui.

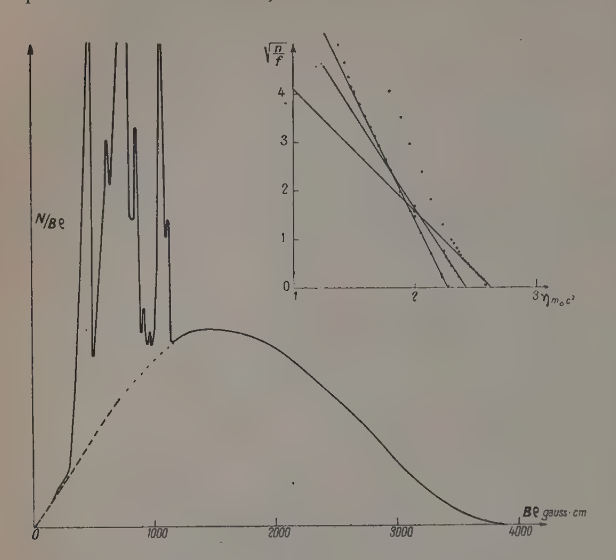



Fig. 4. — Spectre $\gamma$ et diagramme de Fermi de $^{153}$Sm.

**Étude des raies de conversion.** — Avec un pouvoir de résolution de 2 pour 100 et une précision de 1 pour 100 pour chaque point mesuré, nous n'avons pu mettre en évidence de raies de conversion correspondant aux photons de 545 et 172 keV. Si, comme on le verra lors de la discussion du schéma de niveau de $^{153}$Eu, on considère le rayonnement de 172 keV comme un quadrupôle électrique, la limite de l'intensité de la transition directe donnée par l'absence de raies de conversion est en accord avec celle donnée par la mesure au spectromètre à scintillations.

Pour le photon de 545 keV, étant donnée l'intensité trouvée par spectrométrie $\gamma$, on ne devrait observer de raies de conversion comparable à celle donnée par Lee et Katz que dans le cas du rayonnements d'ordre de polarité élevée ($M3$, $M4$, $E5$).

La figure 5 représente agrandie la région des raies de conversion, corrigée dans le domaine des basses énergies pour l'absorption dans la fenêtre du compteur (120 $\mu$g/cm²); $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ correspondent respectivement aux raies de 69, 103 et 84 keV, les indices $K$, $L$, $M$ indiquant dans quelles couches les raies sont converties. $A_1$, $A_2$ sont les raies Auger d'énergies $E_K - 2E_L$ et $E_K - E_L - E_M$. Enfin, nous avons indiqué la position des raies de conversion des photons $\gamma_4$ (110 keV) et $\gamma_5$ (88 keV) dont on pourrait supposer l'existence d'après le schéma de niveau (voir *fig.* 6). L'élargissement de la raie $\gamma_{1K}$ montre l'importance de l'absorption dans la source pour des électrons de 20 kV; on peut uniquement indiquer que pour ce photon le rapport $\frac{K}{L}$ est supérieur à 4,4, en accord avec la valeur de $\frac{K}{L} > 4,6$ de Graham et Walker; $\frac{L}{M} = 3 \pm 1$.

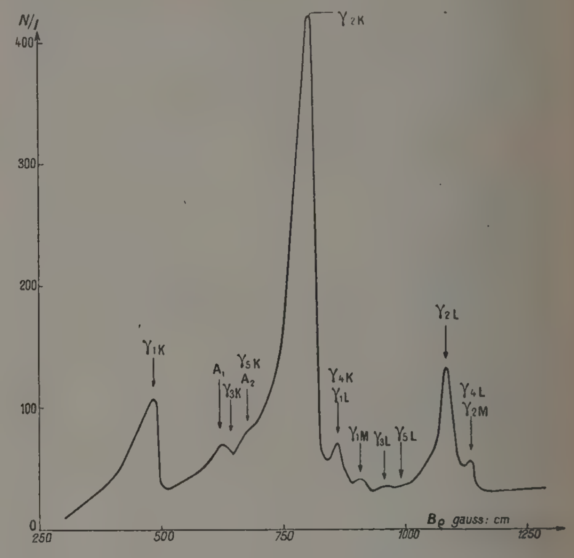



Fig. 5. — Raies de conversion des $\gamma$ de $^{153}$Sm.

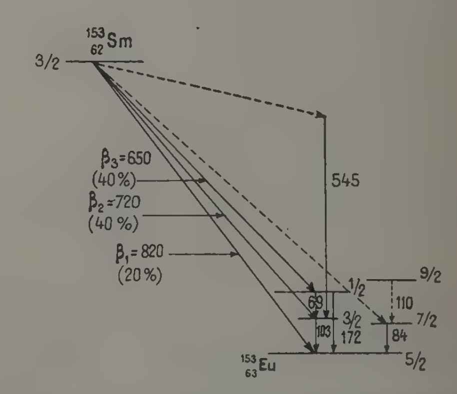



Fig. 6. — Schéma de désintégration de $^{153}$Sm (énergies en keV).

Dans le tableau sont groupées certaines valeurs expérimentales et les valeurs théoriques relatives aux coefficients de conversion du photon de 103 keV.

Les valeurs théoriques $\alpha_2$ et $\beta_1$ ont été calculées pour les quadrupôles électriques par la méthode citée par Mc Gowan [13], pour les diôples magnétiques d'après la formule donnée par Drell [14] reliant les valeurs de $\beta_1$ à celles de $\alpha_2$.

Les valeurs de $\frac{K}{L}$ pour $M1$ ont été évaluées par interpolation pour $\frac{K}{L} = 63$ des valeurs de $\frac{K}{L}$ cal-

TABLEAU.

| Références. | Valeurs expérimentales. $\alpha_K$. | $\frac{K}{L}$. | $\frac{L}{M}$. | Valeurs théoriques. Nature du rayonnement. | $\alpha_K$. | $\frac{K}{L}$. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Siegbahn [12] | 0,65 | 6 | – | $E1$ | 1,1 | ~ 8 |
| Sunyar [5] | 1,2 | – | – | $M1$ | 1,5 | < 2 |
| Lee Katz [6] | 0,6 | 6,2 ± 1,5 | – | – | – | – |
| Mac Gowan [5] | 1,14 ± 0,2 | – | – | – | – | – |
| Graham [7] | – | > 6,1 | – | – | – | – |
| Marty | 1,2 ± 0,1 | 6,2 ± 0,3 | 4,5 ± 0,5 | – | – | – |

culables d'après les suppléments aux tables de Rose pour $Z = 85$, 55 et 25 et dépendant très peu de l'énergie du photon. Dans le cas des quadrupôles électriques, une limite supérieure peut être estimée pour ce rapport d'après les mêmes tables.

La valeur expérimentale du rapport $\frac{K}{L}$ permet de conclure que le rayonnement de 103 keV est un mélange $E2 + M1$.

En supposant des coefficients de conversion du même ordre pour les photons de 103 et 84 keV, on aboutit à un rapport d'intensité $\frac{I\,84}{I\,103}$ de l'ordre de quelques pour-cent.

**Discussion des résultats : schéma de niveau de ¹⁵³Eu.** — Les résultats obtenus conduisent au schéma représenté figure 6. Le spin de l'état fondamental de $^{153}$Eu ayant été mesuré comme égal à $\frac{5}{2}$, on est conduit à attribuer aux niveaux de rotation de 84 et 194 keV les spins $\frac{7}{2}$ et $\frac{9}{2}$ [15]. Les transitions β à l'état fondamental et aux états excités de 103 et 172 keV sont beaucoup plus probables que celles aux niveaux de rotation, ceci se justifie si le spin de $^{153}$Sm est $\frac{3}{2}$; il diffère alors de zéro ou une unité du spin de l'état fondamental et des états excités de 103 et 172 keV de $^{153}$Eu conformément à la valeur de log *ft* des spectres β aboutissant à ces niveaux, les états excités ayant les spins $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2}$; ceci est en accord avec la nature ($E2$, $M1$) des photons de 103 et 69 keV et justifie la faible intensité de la transition directe de 172 keV.

L'intensité de quelques pour-cent du photon de 84 keV s'expliquerait par un embranchement β correspondant à une valeur log *ft* de l'ordre de 9; cette valeur est bien dans le domaine de celles indiquées par Mayer, Moszkowski et Nordheim [16] pour des transitions $\Delta J = 2$, oui et $Z = 60$, si aucune interdiction supplémentaire ne s'ajoute en raison du passage d'un niveau de particules à un niveau de rotation [17]. Une autre solution possible serait la transition du niveau à 103 keV au niveau à 84 keV; ceci est difficile à mettre en évidence par détection des rayons γ au spectromètre à scintillations en raison de l'énergie voisine du pic de fuite du rayonnement X de 40 keV; la raie de conversion $L$ au spectromètre β serait masquée par la queue de la raie $\gamma_{1K}$.

Enfin, le photon de 545 keV aboutirait au niveau de 103 keV.

Je tiens à remercier M. le Professeur Joliot pour l'intérêt avec lequel il a suivi ce travail. M. David-Boyer m'a aidé dans le montage du spectromètre. Cette étude a été rendue possible grâce à une allocation du Centre National de la Recherche scientifique et à une subvention accordée au laboratoire par le Commissariat à l'Énergie Atomique.

Manuscrit reçu le 7 décembre 1954.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] MACK J. E. — *Rev. Mod. Physics*, 1950, **22**, 64.
[2] MAYER M. — *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 16.
[3] HOLLANDER J. M., PERLMAN I. et SEABORG G. I. — *Rev. Mod. Physics*, 1953, **25**, 469.
[4] MCGOWAN F. K. — *Phys. Rev.*, 1950, **80**, 482.
[5] MCGOWAN F. K. — *Phys. Rev.*, 1954, **93**, 163.
[6] LEE M. R. et KATZ R. — *Phys. Rev.*, 1954, **53**, 155.
[7] GRAHAM R. L. et WALKER J. — *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1954, **29**, n° 1, p. 57 et Communication privée.
[8] TEMMER G. M. et HEYDENBURG N. P. — *Phys. Rev.*, 1954, **94**, 1399.
[9] HUUS. — Communiqué par A. Bohr.
[10] MARTY N. — *C. R. Acad. Sc.*, 1954, **238**, 2516.
[11] MARTY N. — Communication à la Société française de Physique, 14 mai 1954.
[12] SIEGBAHN K. — Volume commémoratif Manne Siegbahn, 1951, p. 199.
[13] MCGOWAN F. K. — *Phys. Rev.*, 1952, **85**, 1951.
[14] DRELL S. D. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 132.
[15] BOHR A. et MOTTELSON B. R. — *Kgl Danske Vid. Selsk*, 1952, **27**, n° 16.
[16] MAYER M. G., MOSZKOWSKI S. A. et NORDHEIM L. W. — *Rev. Mod. Physics*, 1951, **23**, 315.
[17] ALAGA, ALDER, BOHR et MOTTELSON. — Intensity rules for nuclear β and γ transitions to rotational states, Communication avant publication.

# ÉTUDE DE LA MÉTHODE DES COÏNCIDENCES APPLIQUÉE A L'ÉTALONNAGE ABSOLU DU $^{24}$Na, $^{60}$Co ET $^{46}$Sc

Par Mme S. VUCCINO,

Institut du Radium, Laboratoire Curie.

**Sommaire.** — Le principe de la méthode des coïncidences, appliquée à l'étalonnage absolu des radioéléments artificiels est brièvement rappelé.

On décrit une installation simplifiée, comprenant un compteur β en bout à feuille mince et un compteur à scintillations pour la détection des photons, ainsi qu'une installation avec deux compteurs à scintillations. Les étalonnages ont été effectués d'une part en mesurant les coïncidences entre une particule β et un photon, d'autre part en détectant les coïncidences entre deux photons en cascade, en tenant compte des corrélations angulaires. A cet effet, des mesures sous différents angles ont été effectuées avec deux compteurs à scintillation.

On donne le résultat des étalonnages du $^{60}$Co, $^{24}$Na et $^{46}$Sc par les deux méthodes.

Les résultats ont été contrôlés en France et à l'étranger, en les comparant à ceux obtenus avec les mêmes solutions, mais en utilisant des méthodes différentes.

1. **Principe de la méthode.** — La méthode consiste à détecter à l'aide d'appareils sensibles l'émission simultanée (ou quasi simultanée) de deux particules, chacune étant recueillie dans un compteur différent. Nous nous sommes occupés en premier de la mesure des coïncidences entre un $\beta^-$ émis par désintégration et un quantum. Soit $N_\beta$ le nombre de particules β détectées par un des compteurs, $N_\gamma$ le nombre de quanta détectés par l'autre compteur, $\rho_\beta$ et $\rho_\gamma$ les rendements respectifs des deux appareils de mesure utilisés, et $N_c$ le nombre de coïncidences mesurées. Le nombre $N_0$ de désintégrations absolues pour un schéma simple, se déduit de la formule

$$N_0 = \frac{\rho_\beta N_\beta \times N_\gamma \rho_\gamma}{N_c \rho_\beta \rho_\gamma} = \frac{N_\beta \times N_\gamma}{N_c}.$$

On en déduit l'avantage de cette méthode pour la mesure absolue du nombre de désintégrations où en fin de compte n'entre pas en jeu l'efficacité des appareils de détection, ni les angles solides utilisés. Mais ceci n'est valable que pour un corps dont le schéma de désintégration est représenté par un seul $e^-$ émis par désintégration suivi d'un, ou au plus deux rayons γ en cascade, de même énergie. Une autre condition importante pour que cette formule puisse être appliquée, est la nécessité que les rendements $\rho_\beta$ et $\rho_\gamma$ soient les mêmes pour les différents points de la source. Il faut donc que la source ne soit, ni épaisse, ni étendue et que le support de source soit très fin pour éviter la diffusion en arrière des électrons. C'est pourquoi nous avons pris des précautions spéciales dans la préparation du support et de la source elle-même, en utilisant des supports préparés par nous de 0,05 à 0,01 mg/cm², en formvar [23] et des solutions avec le moins de matière possible pour obtenir des sources d'un diamètre d'environ 1 mm maximum.

2. **Étude de l'appareillage et de ses qualités.** — *a*. INSTALLATION UTILISÉE. — Le premier problème qui s'est posé au début de ce travail était la mise au point d'une installation comprenant un compteur en bout à paroi mince pour la détection des électrons et, d'autre part, d'un photomultiplicateur pour le comptage des quanta. Nous avons voulu remplacer le compteur G. M. à rayon γ par un compteur à scintillations avec cristal à cause de l'efficacité de beaucoup supérieure de ce dernier par rapport au compteur G. M., ce qui permettait des taux de comptage plus élevés, donc un plus grand nombre de coïncidences détectées et une meilleure précision des mesures; de cette manière, le temps des mesures étant réduit, on diminuait les erreurs dues aux fluctuations du mouvement propre, du temps mort des compteurs et du temps de résolution de l'amplificateur à coïncidences.

*b*. LES CARACTÉRISTIQUES DE L'APPAREILLAGE. — Nous avons utilisé un photomultiplicateur anglais EMI à 11 étages avec un cristal de INa d'environ 50 mm de diamètre et 25 mm d'épaisseur. Nous nous sommes appliqués à mettre au point une installation très simple qui ne nécessite ni l'utilisation d'un sélecteur d'amplitude ni l'amplificateur de 2 Mc, généralement utilisés dans le montage des mesures par la méthode des coïncidences.

Le photomultiplicateur était relié au sélecteur de coïncidences uniquement à travers un préamplificateur qui contenait une lampe à cathode suiveuse pour obtenir des impulsions à basse impédance et, en plus, un amplificateur linéaire à gain $\sim$ 300. Le fait d'utiliser deux détecteurs différents n'ayant pas le même temps de réponse, nous a obligés à choisir pour le sélecteur à coïncidences un temps de résolution assez long. Après une étude dont nous verrons plus bas les résultats, nous avons fixé le temps de résolution entre 1,8 et $0,6 . 10^{-6}$ s, pour un

photomultiplicateur avec cristal de INa, dont le temps de montée de l'impulsion est de $3.10^{-7}$ s. Nous avons discriminé les impulsions dont l'amplitude inférieure à 0,5 V correspond aux bruits de fond du photomultiplicateur même en utilisant uniquement le discriminateur du sélecteur à coïncidences. Quant au bruit de fond du cristal et qui est dû aux cosmiques, nous l'avons évalué par la mesure du mouvement propre en $\gamma$ au phototube. Nous avons réglé la haute tension appliquée au photomultiplicateur et le gain de l'amplificateur pour que l'amplitude de l'impulsion soit bien supérieure au seuil de sensibilité du sélecteur à coïncidences qu'il doit attaquer. La tension appliquée aux bornes du photomultiplicateur variait autour de 1100 V, d'après l'énergie des rayonnements utilisés. Nous avons utilisé une haute tension, construite par le C. E. A., qui peut débiter un courant stabilisé de 5 000 V et 300 $\mu$ A. Le compteur G. M. employé était un compteur en bout avec une fenêtre de mica de 2,5 mg/cm².

*c*. Détermination du temps de résolution $\tau$, par la méthode de Norling. — En dehors des coïncidences vraies produites par les particules du même noyau, on enregistre des coïncidences accidentelles ou fortuites qui sont fonction du temps de résolution : $N_f$ nombre de fortuites $= 2\tau N_\beta N_\gamma$.

Les coïncidences fortuites ont été mesurées de la manière habituelle : le compteur $\beta$ et le phototube sont éloignés l'un de l'autre et blindés de Pb. Ils sont soumis chacun aux rayonnements de deux sources indépendantes, dans ce cas du $^{60}$Co. En mesurant ainsi $N_f$, $N_\beta$ et $N_\gamma$, nous avons calculé $\tau$.

*d*. Influence de la valeur de $\tau$ sur les résultats des mesures en coïncidences. — Un étalon de $^{60}$Co nous a servi à déterminer la valeur du temps de résolution de l'installation à coïncidences utilisant un compteur G. M. et un photomultiplicateur. Des selfs variables à l'intérieur du sélecteur à coïncidences nous ont permis de varier les temps de résolution entre 1,8 et $0,1.10^{-6}$ s. Le tableau ci-joint donne les résultats obtenus dans la mesure de l'étalon de Co; les taux de comptage en $\beta$, $\gamma$ et en coïncidences, les coïncidences fortuites et la précision de mesure pour les différentes valeurs de $\tau$ utilisées. Les mesures ont été faites aussi en coïncidences $\gamma - \gamma$. On voit, d'après ces résultats, que le nombre de coïncidences *fortuites* diminue sensiblement en diminuant la valeur de $\tau$, mais que les résultats ne sont concordants que pour des valeurs de $\tau$ entre 1,83 et $0,30.10^{-6}$ s. Pour une valeur de $\tau$ de $0,11.10^{-6}$ s les pertes des coïncidences sont importantes et introduisent une erreur de 22,2 pour 100. Le temps de résolution étant trop court, on perd des coïncidences vraies.

Tableau I.

*Comparaison des mesures d'une source* $^{60}$Co *pour différentes valeurs de* $\tau$. *Mesures effectuées en coïncidences* $\gamma - \gamma$.

Valeur de l'étalon $^{60}$Co :

$3,166.10^6 \pm 1$ pour 100 désintégrations/mn.

| Temps de résolution. | Taux de comptage (moins le m. p.) (en coups/mn). | Valeurs des coïncidences fortuites (en coups/mn). | Résultats par rapport à la valeur de l'étalon (en désintégr./mn). |
|---|---|---|---|
| $\tau_1$ $1,8.10^{-6}$ s | $N_{\gamma_1}$ 77 200<br>$N_{\gamma_2}$ 62 410<br>$N_c$ 1 600 | 188,5 | $3,18.10^6$ Différence avec l'étalon : 0,44 pour 100 |
| $\tau_2$ $1,0.10^{-6}$ s | $N_{\gamma_1}$ 77 180<br>$N_{\gamma_2}$ 63 010<br>$N_c$ 1 610 | 174 | $3,17.10^6$ Différence avec l'étalon : 0,12 pour 100 |
| $\tau_3$ $0,3.10^{-6}$ s | $N_{\gamma_1}$ 77 127<br>$N_{\gamma_2}$ 60 810<br>$N_c$ 1 550 | 25,2 | $3,25.10^6$ Différence avec l'étalon : 2,6 pour 100 |
| $\tau_4$ $1.10^{-6}$ s | $N_{\gamma_1}$ 77 300<br>$N_{\gamma_2}$ 64 860<br>$N_c$ 1 240 | 17,7 | $4,06.10^6$ Différence avec l'étalon : 22,2 pour 100 |

Fig. 1.

3. **Vérification avec une source étalon du fonctionnement de l'installation**. — Dans le but de vérifier le bon fonctionnement de l'installation à coïncidences utilisant un compteur G. M. $\beta$ en bout et un compteur à scintillations, nous avons utilisé un étalon $^{60}$Co obtenu avec une solution de $Cl_2Co$, préparée par U. S. Atomic Energ. Commission, déposé sur un support de 0,01 mg/cm² [1], [2] (*fig.* 1).

*a*. Marche de l'expérience. Calculs. — *Coïncidences* $\beta - \gamma$. — Nous avons mesuré en même temps, pendant 20-30 mn suivant l'expérience les taux de comptage en $\beta$, en $\gamma$ et en coïncidences. Soient $N_\beta$, $N_\gamma$, $N_c$. Nous appelons $\mathcal{N}_\beta$ le nombre de $\beta$ justes, $\mathcal{N}_\gamma$, le nombre de $\gamma$ justes, $\mathcal{N}_c$, le nombre de coïncidences justes. Il est tenu compte dans ces valeurs de toutes les corrections nécessaires dont nous verrons plus bas le détail.

Le compteur β étant sensible aux rayonnements γ, nous avons évalué le nombre de quanta détectés par le compteur G. M., valeur que nous avons retranchée du taux de comptage β. Ceci en appliquant des écrans d'aluminium d'épaisseurs suffisantes devant le compteur G. M. pour absorber les β. La valeur ainsi retranchée $N_{\beta_1}$ comprend aussi le mouvement propre du compteur.

Le nombre $\mathcal{N}_\gamma$ est obtenu en retranchant le mouvement propre en γ du phototube ($N$ m. p.).

La mesure dans laquelle nous avons arrêté les β par des écrans nous a donné aussi la valeur des coïncidences de deux quanta détectés simultanément par le compteur et le phototube, coïncidence γ — γ, valeur qui est retranchée du nombre de coïncidences comptées. La correction due aux coïncidences fortuites est faite, en évaluant les fortuites d'après la formule connue $N_f = 2\tau N_\beta N_\gamma$, le temps de résolution de l'amplificateur à coïncidences ayant été déterminé par la méthode de Norling, comme il est indiqué plus haut. On calcule aussi les fortuites obtenues pendant la mesure des coïncidences γ — γ

$$N_{\text{fort. II}} = 2\tau N_{\gamma_1} N_{\gamma_2}$$

$N_{\gamma_2}$ représente le nombre de γ comptés par le compteur G. M.

Le nombre de coïncidences justes est finalement exprimé par

$$\mathcal{N}_c = N_c \text{ mes} - [N_{c\,\gamma-\gamma} + N_{c\,\text{fort. I}} + N_{c\,\text{fort. II}}].$$

Le nombre de désintégration par minute a été obtenu de la formule

$$N_0 = \frac{\mathcal{N}_\beta \times \mathcal{N}_\gamma}{\mathcal{N}_c},$$

formule qui a pu être appliquée à cause de la simplicité du schéma de désintégration.

Nous exprimons dans le tableau II, le résultat de l'étalonnage du $^{60}$Co par la mesure des coïncidences β — γ.

*b.* Erreurs dues aux fluctuations du mouvement propre et du temps de résolution. — Sur une série d'expériences de 30 à 60 mn nous avons pu constater que les fluctuations du mouvement propre variaient entre 0,5 et 1,4 pour 100. Dans l'évaluation du mouvement propre nous avons tenu compte de ses fluctuations en prenant la moyenne des mesures effectuées au début et à la fin de chaque expérience.

En ce qui concerne les fluctuations du temps de résolution τ, pour que les erreurs dues à des fluctuations soient négligeables, nous avons utilisé un temps de résolution moyen de 1 ou 2 μs et des taux de comptage qui ne soient pas trop élevés. Les fluctuations du temps de résolution introduisent des variations des coïncidences fortuites évaluées, variations qui sont d'autant plus grandes que les taux de comptage sont plus grands.

Tableau II.

*Résultats de l'étalonnage du $^{60}$Co.*

$$N_0 \text{ d/mn} = \frac{N_\beta \times N_\gamma}{N_c} \quad (*).$$

Valeur de l'étalon de $^{60}$Co :
1,20 ± 0,06 μC le 1er juillet 1953.

| | |
|---|---|
| $\mathcal{N}_\beta$ (coups/mn) | 5 224 |
| $\mathcal{N}_\gamma$ » | 57 880 |
| $N_{c\,\text{fort. I}}$ (coups/mn) | 24,6 |
| $N_{c\,\text{fort. II}}$ » | 0,49 |
| $\mathcal{N}_c$ (coups/mn) | 111,65 |
| $N_0$ (d/mn) | $2,59.10^6$ |
| $N_0$ (μC) | 1,16 |
| $N_0$ compte tenu de la décroissance (μC) | 1,176 ± 0,01 |

(*) $N_0$, nombre de désintégrations; d/mn, désintégrations par minute; $\mathcal{N}_\beta$, nombre de β comptés-nombre de γ comptés par le G. M.-mouvement propre; $\mathcal{N}_\gamma$, nombre de γ comptés-mouvement propre; $N_{c\,\text{fort. I}}$, coïncidences fortuites calculées de $2\tau N_\beta$ comptés × $N_\gamma$ comptés; $N_{c\,\text{fort. II}}$, coïncidences fortuites calculées de $2\tau N_\gamma$ comptés au P. M. × $N_{\gamma_2}$ comptés au G. M.

*c.* Erreurs des mesures par coïncidences. — Les erreurs statistiques dues aux fluctuations de mesures ont été calculées pour toutes les valeurs mesurées : les taux de comptage de l'émission β, γ, ainsi que des coïncidences et du mouvement propre.

Nous avons évalué l'erreur maximum sur le nombre de désintégrations $N$, comme étant [3]

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta C}{C},$$

$A$, $B$, $C$ étant chacun le nombre de β, γ et de coïncidences provenant réellement de la source. On a évalué l'erreur sur chacune de ces valeurs en tenant compte de l'efficacité du compteur G. M. pour les rayons γ, du mouvement propre, ainsi que des fluctuations statistiques des taux de comptage et des coïncidences fortuites.

**4. Étalonnage en coïncidences β — γ du $^{24}$Na.** — Le Na a été irradié sous forme de $CO_3Na_2$. Pour l'étalonnage nous avons préparé une solution contenant 0,1048 ± 0,0001 g de $CO_3Na_2$ dissous dans 10 cm³ d'eau. De cette solution ont été préparées deux sources sur feuille de polystyrène de 0,12 mg/cm² en déposant chaque fois avec une micropipette une goutte pesée avec une précision de 0,0001 g. Nous avons obtenu deux sources de 10,3 mg ± 0,1 et 39 mg ± 0,05 (*fig.* 2).

Les valeurs de l'activité spécifique obtenue par la mesure de chaque source ont été comparées entre elles. L'étalonnage du $^{24}$Na en coïncidences β — γ a été contrôlé au service de mesures du C. E. A. par une mesure faite avec un compteur à liquide préalablement étalonné grâce à une solution de $^{24}$Na délivrée par les laboratoires A. E. R. E. de Harwell. Une autre vérification a été faite par la mesure des coïncidences des deux photons en cascades.

Le tableau IV indique la valeur de l'activité spécifique obtenue pour plusieurs sources de $^{24}$Na qui ont été mesurées par la méthode des coïncidences β — γ ainsi que par d'autres méthodes.

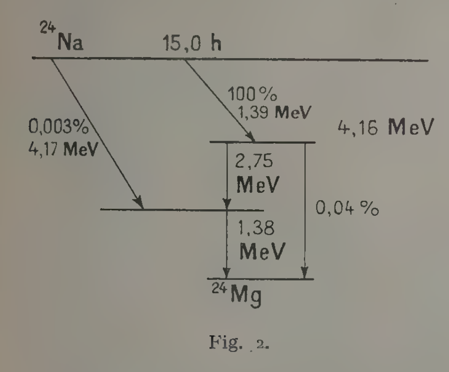



Fig. 2.

5. **Étalonnage par coïncidences β — γ du $^{46}$Sc. Schéma de désintégration du $^{46}$Sc.** — Nous avons utilisé une solution de $^{46}$Sc préparée par « Oakridge National Laboratory », U. S. A., exempte d'autre isotope. Les sources sont obtenues par dépôt d'une microgoutte sur une feuille de formvar de 0,05 mg/cm² (*fig.* 3) [5], [2]. La goutte est pesée

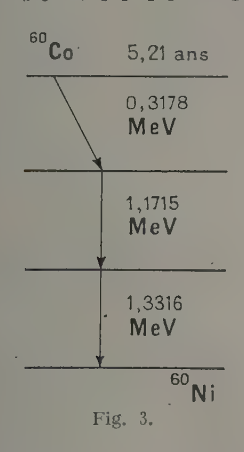



Fig. 3.

avec une microbalance dont la précision est de 0,002 mg. Une source, beaucoup plus intense de l'ordre de 0,2 mC a été mesurée avec une chambre d'ionisation par rayonnements γ et dont on connaît la géométrie et l'efficacité pour les énergies des photons utilisés [6].

Nous avons comparé entre elles les valeurs obtenues dans la mesure par différentes méthodes de l'activité spécifique de la solution (tableau IV). Le recoupement entre le résultat des mesures par coïncidences et celui des mesures de la chambre d'ionisation est seulement de 9 pour 100, car on ne peut obtenir par cette dernière méthode qu'une précision de 6-10 pour 100. On trouvera les détails de cette méthode dans la deuxième partie de ce travail.

6. **Étalonnage par la mesure des coïncidences γ — γ du $^{60}$Co, $^{24}$Na et du $^{46}$Sc.** — *a*. ÉTUDE DE LA FONCTION DE CORRÉLATION ANGULAIRE γ — γ DU $^{60}$Co, $^{24}$Na ET $^{46}$Sc. COMPARAISON DES RÉSULTATS OBTENUS AVEC LA THÉORIE ET LES TRAVAUX ÉTRANGERS. — Après Dunworth [8], qui a le premier émis l'hypothèse d'une corrélation angulaire non isotrope dans certains cas où deux photons sont émis en cascade, Hamilton [9] a étudié, théoriquement, la question en 1940. Plus tard, d'autres auteurs [10], [11], [12] ont généralisé ces résultats. La fonction de corrélation angulaire $W(\theta)$ pour deux rayonnements successifs, est de la forme

$$W(\theta) = 1 + \sum_{i=1}^{i=l} a_i \cos^{2i}\theta.$$

Le coefficient $a_i$ dépend à la fois des ordres polaires $l_1$ et $l_2$ des rayonnements γ émis et des spins $j_1$, $j_2$, $j_3$, de l'état initial, intermédiaire et final; $i$ est plus petit ou égal à la plus petite valeur de $l_1$, $l_2$ et $j_2$

$$i \leq l_1,\ l_2,\ j_2.$$

On voit que $W(\theta)$ est une somme de puissance paire de $\cos\theta$.

On trouve dans les tables [13], [14], [15] les valeurs du coefficient $a$ en fonction de $l_1$, $l_2$ et $j_2$. Dans le cas des trois corps étudiés par nous, le $^{24}$Na, le $^{46}$Sc et le $^{60}$Co, la désintégration est de la forme [2], [18]

$$\begin{array}{ccccc} j_1 & \xrightarrow[E(2)]{l_1} & j_2 & \xrightarrow[E(2)]{l_2} & j_3, \\ 4^+ & \longrightarrow & 2^+ & \longrightarrow & 0^+. \end{array}$$

Dans ce cas, $i = 2$ et la fonction de corrélation angulaire γ — γ du $^{24}$Na, $^{46}$Sc et $^{60}$Co est la suivante :

$$W(\theta) = 1 + a_1 \cos^2\theta + a_2 \cos^4\theta.$$

Nous avons calculé les coefficients d'après la méthode et à l'aide des tables indiquées plus haut.

Dans notre cas nous avons calculé la fonction normalisée, c'est-à-dire que nous avons posé la condition

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} W(\theta) \sin\theta \, d\theta = 1$$

qui exprime que la somme du nombre de coïncidences pour différentes valeurs de $\theta$ comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et $\pi$ soit égale à 1. La fonction de corrélation angulaire ainsi normalisée est exprimée par l'équation

$$W(\theta) = 0{,}95 + 0{,}12 \cos^2\theta + 0{,}04 \cos^4\theta.$$

En calculant $W(\theta)$ pour différentes valeurs de $\theta$, nous avons obtenu la variation anisotrope de la

fonction de corrélation angulaire $W(\theta)$ en fonction de $\theta$. La répartition isotrope des coïncidences pour un même taux de comptage dans le cas où il n'y aurait pas de corrélation angulaire est représentée par une droite d'ordonnée 1. Nous avons constaté que dans notre cas, la variation de la fonction $W(\theta)$ est faible, de 0,95 pour 90° à 1,11 pour 180°. L'abscisse du point d'intersection de cette courbe avec la droite de répartition isotropique nous donne l'angle sous lequel le nombre de coïncidences comptées correspond aux coïncidences justes s'il n'y avait pas de corrélation angulaire. Dans le cas du $^{46}$Sc, $^{24}$Na et $^{60}$Co, cet angle est de 130°.

Les résultats expérimentaux ont été normalisés de manière qu'ils correspondent au même nombre total de coïncidences que la courbe théorique. Expérimentalement pour chaque corps étudié la droite de répartition isotrope a été trouvée par la méthode de la comparaison des surfaces.

*b.* Méthodes de mesure des coïncidences $\gamma - \gamma$. Appareils utilisés. — La mesure des coïncidences de deux photons en cascades permet de déterminer le nombre de désintégrations d'un noyau.

Si $\mathcal{N}_{\gamma 1}$ et $\mathcal{N}_{\gamma 2}$ sont les nombres des photons émis par le noyau (correction faite du mouvement propre), $\mathcal{N}_c$ le nombre de coïncidences, $\mathcal{N}_0$ le nombre de désintégrations se déduit de

$$\mathcal{N}_0 = \frac{\mathcal{N}_{\gamma_1} \times \mathcal{N}_{\gamma_2}}{\mathcal{N}_c},$$

où

$\mathcal{N}_{\gamma 1} = N_{\gamma 1}$ comptés-mouvement propre;
$\mathcal{N}_{\gamma 2} = N_{\gamma 2}$ comptés-mouvement propre;
$\mathcal{N}_c = \mathcal{N}_c$ comptés-fortuites.

Pour la mesure des coïncidences $\gamma - \gamma$, nous avons utilisé deux compteurs à scintillations montés comme indiqué pour le premier dans la description du montage de l'installation à coïncidences.

La source placée à égale distance entre deux phototubes, l'un restant fixe, l'autre a été déplacé de manière à pouvoir donner différentes valeurs à l'angle compris $\alpha$ entre les deux compteurs à scintillations. Pour réduire l'erreur dans la détermination de l'angle $\alpha$, nous avons utilisé de petits angles solides, la distance de la source à chaque compteur était de 5 à 10 cm, le diamètre de la fenêtre d'entrée des compteurs 1,8 cm.

*c.* Résultats des étalonnages par coïncidences $\gamma - \gamma$. — Des résultats sur les étalonnages du $^{60}$Co, $^{46}$Sc et $^{24}$Na en $\gamma - \gamma$ pour $\theta$ = 90, 130, 150 et 180° (tableau III), il résulte que la différence obtenue entre ces diverses mesures correspond à la variation de la fonction de corrélation angulaire $W(\theta)$ trouvée expérimentalement par plusieurs auteurs [16], [17], [18], [19], [20] et celle prévue par la théorie, dans de bonnes limites d'erreurs. En comparant les mesures en coïncidences $\beta - \gamma$ et celles en $\gamma - \gamma$ (tableau IV), on constate que les résultats pour le $^{24}$Na correspond à 0,63 pour 100 près.

Tableau III.

*Comparaison des mesures par coïncidences $\gamma - \gamma$ pour différentes valeurs de l'angle $\theta$.*

(Valeurs indiquées en désintégrations par minute.)

| | $\theta = 90°$. | $\theta = 130°$. | $\theta = 180°$. | (*) (pour 100). | (**) (pour 100). |
|---|---|---|---|---|---|
| $^{60}$Co....... | $3{,}182 \cdot 10^6$ | $3{,}070 \cdot 10^6$ | $2{,}881 \cdot 10^6$ | 17 | 10 |
| $^{24}$Na....... | $3{,}186 \cdot 10^6$ | $3{,}165 \cdot 10^6$ | $3{,}144 \cdot 10^6$ | – | 4 |
| $^{46}$Sc....... | $0{,}910 \cdot 10^6$ | $0{,}891 \cdot 10^6$ | $0{,}871 \cdot 10^6$ | – | 4 |

(*) Variation théorique de $W(\theta)$ entre 90 et 180°.
(**) Différence des résultats à 90 et 180°.

Tableau IV.

*Résultats des mesures du $^{60}$Co, $^{24}$Na et $^{46}$Sc.*

| Source mesurée. | Activité trouvée par différentes méthodes (mc = millicuries). Coïncidences $\beta - \gamma$. | Coïncidences $\gamma - \gamma$ à 130°. | Compteur à liquide. | Chambre d'ionisation. | Précision de mesure (pour 100). |
|---|---|---|---|---|---|
| $^{60}$Co (mC)... | 0,001176 | 0,001184 | – | – | ±0,37<br>±0,31 |
| | | $^{24}$Na (mC/g). | | | |
| N° 1......... | 0,0143 | 0,0143 | 0,0146 | – | ±1,8<br>1,58 |
| N° 2......... | 0,0144 | 0,0146 | – | – | ±2,3<br>1,0 |
| N° 3......... | – | – | – | 0,0156 | ±5 |
| | | $^{46}$Sc (mC/cm$^3$). | | | |
| N° 1......... | 3,45 | 3,47 | – | – | ±0,73<br>±0,46 |
| N° 2......... | 3,45 | 3,48 | – | – | ±0,80<br>0,40 |
| N° 3......... | – | – | – | 3,74 | ±6,4 |

Pour le $^{60}$Co et le $^{46}$Sc, les résultats des mesures en $\gamma - \gamma$ sont supérieurs de 1 à 2 pour 100 à celles en $\beta - \gamma$.

Les rayonnements $\gamma$ du $^{24}$Na étant plus durs (2,76 et 1,39 MeV), que ceux du $^{60}$Co (1,17 et 1,33 MeV) et du $^{46}$Sc (0,89 et 1,12 MeV), cette différence s'expliquerait par des pertes de coïncidences causées par un déphasage des impulsions qui doivent attaquer l'amplificateur à coïncidences. Dans le cas de notre montage et pour l'amplification utilisée, les impulsions qui correspondent à des rayonnements d'énergie plus faible auraient un temps de montée trop long.

D'autres auteurs [21], [22] ont signalé, entre le résultat de la mesure par coïncidences $\beta - \gamma$ et les résultats obtenus par d'autres méthodes, des divergences supérieures à 2 pour 100 qu'ils ont attribuées

à l'efficacité du compteur G. M. pour les photons. De notre côté nous avons effectué la correction due à l'efficacité aux $\gamma$ du compteur G. M. en absorbant les rayonnements $\beta$ par un écran d'aluminium d'épaisseur convenable. La précision de cette méthode, à laquelle on reproche la formation des électrons secondaires dans l'écran a été vérifiée en déviant les rayons $\beta$ grâce à un champ magnétique. Il s'est avéré que *la différence entre les deux méthodes de corrections* était bien inférieure à 2 pour 100 pour les trois corps étudiés.

*d*. Avantages de la mesure par coïncidences $\gamma - \gamma$. — Dans le cas d'un schéma de désintégration plus complexe, mais où le rayonnement $\gamma$ consiste seulement en deux photons émis en cascade, l'avantage de l'étalonnage en coïncidences $\gamma - \gamma$ réside d'abord dans la simplicité des équations utilisées, puisque l'on ne considère que deux rayonnements émis par désintégration. En second lieu, on peut utiliser avantageusement des taux de comptage dix fois plus élevés avec un photomultiplicateur qu'avec un compteur G. M., le temps de mesure est donc de beaucoup plus réduit dans la méthode des coïncidences $\gamma - \gamma$ que dans celle des coïncidences $\beta - \gamma$. Ainsi diminuent les erreurs possibles dues aux fluctuations du temps de résolution de l'amplificateur à coïncidences et de celles du mouvement propre, ainsi que les erreurs statistiques de comptage.

*e*. Quelques considérations pratiques sur les intensités des sources et les installations utilisées. — L'intensité radioactive d'une source qui puisse être mesurée par la méthode des coïncidences dépend de l'efficacité des compteurs qui varie pour les différentes énergies des particules et rayonnements émis. Nous discutons plus bas en donnant quelques exemples, les différents facteurs qui limitent les bonnes conditions de mesures et les solutions pratiques pour pouvoir mesurer par la méthode des coïncidences des sources d'intensité différentes. Dans le cas où l'on étalonne une source de faible intensité ou si l'efficacité des compteurs est faible pour l'énergie des rayonnements émis, on est obligé de rapprocher les compteurs de la source. Ainsi on augmente les angles solides efficaces et en conséquence le rendement de comptage; toutefois pour diminuer les erreurs statistiques dues aux taux de comptages faibles on doit prolonger le temps de mesure. L'intensité minimum d'une source qui puisse être étalonnée par coïncidences est liée à la sensibilité des compteurs au mouvement propre et dépend aussi du rapport $\frac{\text{coïncidences fortuites}}{\text{coïncidences réelles}} = 2\tau\mathcal{N}$, $\mathcal{N}$, nombre absolu de désintégrations par seconde. Ce rapport ne devient complètement négligeable même pour de très faibles sources à cause des coïncidences fortuites provenant du bruit de fond des appareils. D'autre part, la limite supérieure des intensités mesurables dépend des taux de comptage qui sont limités à des valeurs maxima de 10 000 coups/mn pour un compteur G. M. et $\sim$ 1 000 000 coups/mn pour le comptage de $\gamma$ avec une installation comprenant un compteur à scintillation suivi d'un amplificateur. Au-dessus de ces valeurs, les pertes de comptage introduisent des erreurs importantes. Ces valeurs limites de comptage peuvent être respectées même avec des sources supérieures à quelques microcuries dans le cas des mesures par coïncidences $\gamma - \gamma$, car grâce à leur très grande efficacité ces compteurs peuvent être éloignés sensiblement de la source. Ainsi nous avons étalonné une coïncidence $\gamma - \gamma$, une source de $^{24}$Na de $7{,}88.10^{4}$ désintégrations/s avec une précision de 4,2 pour 100 en plaçant les compteurs P. M. à $\sim$ 5 cm de la source. Nous avons eu des taux de comptage de :

$N_{\gamma 1}$, 65 860 coups/mn $\pm$ 0,1 pour 100;
$N_{\gamma 2}$, 58 300 coups/mn $\pm$ 0,1 pour 100;
$N_{\gamma c}$, 1029 coups/mn $\pm$ 0,7 pour 100;
$N_c$ fort. = 520 coups/mn.

En général il y a avantage à pouvoir travailler avec les compteurs assez éloignés de la source pour plusieurs raisons : d'une part, on élimine l'erreur possible due aux dimensions de la source; d'autre part, les angles solides sont bien définis et en plus on évite de compter avec le compteur G. M. les électrons secondaires qui peuvent être arrachés au support de la source.

7. **Conclusions.** — L'étalonnage par la méthode de mesure des coïncidences présente l'avantage très connu d'utiliser les compteurs usuels Geiger-Müller ou les compteurs à scintillations, et de permettre la mesure de sources d'intensité variable.

Cette étude sur l'étalonnage absolu par coïncidences nous a donné la possibilité de mettre au point une installation dépourvue de toute complication, pour obtenir des résultats équivalents. Les résultats des mesures en coïncidences $\beta - \gamma$ correspondent à ceux vérifiés par les différentes méthodes de contrôle, avec une différence inférieure à 2 pour 100, nous avons même pu obtenir une précision meilleure à 1 pour 100 pour le $^{24}$Na. Ce qui permet de conclure que pour des corps à schéma de désintégration simple et bien connue, la méthode de mesures par coïncidences peut être utilisée efficacement; elle ne présente aucune difficulté en ce qui concerne l'appareillage, ne demande pas de préparation compliquée de la source et est, en outre, une méthode rapide dans l'utilisation des compteurs à grande efficacité comme les photomultiplicateurs à cristaux.

Ce travail a été effectué sous la direction de Mme Irène Joliot-Curie, nous la remercions très vivement pour ses multiples conseils et l'intérêt qu'elle a bien voulu lui accorder.

Nous exprimons toute notre reconnaissance envers M. Grinberg, chef du Service des Mesures du C. E. A., ainsi qu'envers ses collaborateurs pour nous avoir permis d'effectuer une partie de ce travail dans son laboratoire et mis au courant des méthodes utilisées au C. E. A.

Nos sincères remerciements à Mme P. Benoist-Gueutal pour nous avoir renseignés et guidés dans l'étude des corrélations angulaires.

Manuscrit reçu le 23 décembre 1954.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] *Phys. Rev.*, 1953, **91**.
[2] Hollander, Perlman et Seaborg. — *Rev. Mod. Physics*, 1953, **25**, 469.
[3] Putman J. L. — *J. Radiol.*, **23**, p. 265.
[4] Bloom S. D. — *Phys. Rev.*, 1952, **88**, 312.
[5] *Phys. Rev.*, 1951, **81**, 640.
[6] Savel P. — *Cahiers de Physique*, 1944, n° 19.
[8] Dunworth J. V. — *Rev. Sc. Instr.*, 1940, **11**, 167.
[9] Hamilton D. R. — *Phys. Rev.*, 1940, **58**, 122.
[10] Falkoff D. L. et Uhlenbeck G. E. — *Phys. Rev.*, 1950, **79**, 323.
[11] Loyd S. P. — *Phys. Rev.*, 1951, **81**, 307.
[12] Racah G. — *Phys. Rev.*, 1951, **82**, 309.
[13] Loyd S. P. — *Phys. Rev.*, 1951, **83**, 716.
[14] Biedenharn L. C. et Rose M. E. — *Rev. Mod. Physics*, 1953, **25**, 729.
[15] Fraunfelder H. — *Ann. Rev. Nucl. Sc.*, 1953, **2**, 129.
[16] Barnothy J. et Forro M. — *Rev. Sc. Instr.*, 1951, **22**.
[17] Beister J. R. et Wiedenbeck N. R. — *Phys. Rev.*, 1952, **79**.
[18] Brady E. L. et Deutsch M. — *Phys. Rev.*, 1950, **78**.
[19] Brady E. L. et Deutsch M. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**.
[20] Bothe W. et Bayer. — *Z. Physik*, 1935, **95**.
[21] Putman J. L. — Unclassified Report, July 1953.
[22] Perry W. E. — Report, July 1953.
[23] Vuccino S. — *J. Physique Rad.*, 1952, **13**, 543.
[24] Marin P., Bishop G. R. et Halban H. — *Proc. Phys. Soc.*, 1953, A **66**, 608-1113.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 16, JUIN 1955, PAGE 468

# COMPTAGE RÉSIDUEL DANS UN SYSTÈME DE COMPTEURS GEIGER-MÜLLER EN COÏNCIDENCE

Par André PAPINEAU,
Service de Physique nucléaire, C. E. N. de Saclay.

**Sommaire.** — En cherchant à mettre en évidence une interaction neutrino-électron, nous avons dû diminuer le comptage résiduel de compteurs en coïncidence. Nous nous sommes attachés à réduire l'activité propre des compteurs en étudiant la contribution de nombreux matériaux. Nous avons étudié l'effet dû à l'air ambiant et la meilleure protection susceptible de diminuer notre comptage résiduel. A la précision statistique près, aucune interaction neutrino-électron n'a été décelée.

Depuis l'introduction du neutrino dans la théorie de la désintégration β [1], de nombreux auteurs ont cherché à mettre en évidence une interaction du neutrino et de la matière.

Nahmias [2], avec une source de radium, avait donné une limite de $10^{-30}$ cm² pour la section efficace d'interaction neutrino-électron. Plus récemment, Barrett [3] avait abaissé cette limite à $4.10^{-34}$ cm². Crane [4] estimait que la région entre $10^{-34}$ et $10^{-35}$ cm² était à éliminer. Wollan [5], en utilisant le flux de neutrinos issu d'une pile, avait trouvé $2.10^{-30}$ cm² comme limite supérieure.

D'autres auteurs ont cherché à mettre en évidence une interaction nucléaire. Saxon [6] avait trouvé $2,5.10^{-37}$ cm² comme limite supérieure à la réaction $e^- + {}^1H \rightarrow n + \nu$. Reines et Cowan [7] ont déterminé récemment la section efficace de la radioactivité β inverse du proton (${}^1H + \nu \rightarrow n + \beta^+$) et ont donné $6.10^{-44}$ cm².

En se basant sur le cycle du carbone [8], [9] ou sur celui de l'hydrogène [10], [11], on peut considérer que le flux de neutrinos solaires sur la terre est de l'ordre de $10^{11}$/cm²/s. Dans la première hypothèse, les neutrinos ont une énergie maximum de 1,7 MeV avec une énergie moyenne de 1 MeV; dans la seconde hypothèse, les neutrinos ont une énergie maximum de 0,4 MeV.

Sur la suggestion de M. Berthelot, nous avons cherché à mettre en évidence la projection d'électrons par les neutrinos d'origine solaire, projection qui pourrait se produire, par exemple, par interaction avec le moment magnétique du neutrino s'il est

différent de zéro. On a cherché à mettre en évidence les électrons projetés en faisant l'hypothèse qu'ils devaient constituer une part du résidu de comptage qui subsiste après élimination aussi poussée que possible de toutes les causes connues de mouvement propre. Nous avons réalisé un dispositif expérimental tel que la direction des électrons secondaires détectés soit liée à celle des neutrinos primaires en espérant voir une anisotropie des premiers variant avec la direction du soleil.

**Dispositif expérimental.** — Toutes les mesures ont été faites dans une casemate désaffectée du Fort de Châtillon sous 10 m de terre.

A. Compteurs. — Nous avons d'abord utilisé des compteurs de série type 10 B5 fabriqués au Commissariat à l'Énergie atomique. Ces compteurs ont une coque en magnésium (à 2 pour 100 de manganèse) mordancé par un bain de sulfate de magnésium et de bichromate de potassium. Leur diamètre est de 18 mm environ, la paroi de 15/100e de millimètre d'épaisseur; la longueur du fil central en molybdène (1/10e de millimètre) est de 100 mm, distance mesurée entre les deux extrémités des pièces de garde en laiton. Les rondelles isolantes de l'extrémité sont en sibor. Le remplissage est classique (alcool, 10 mm; argon, 100 mm).

B. Dispositif géométrique. — Dans un premier montage (*fig.* 1), huit compteurs identiques sont

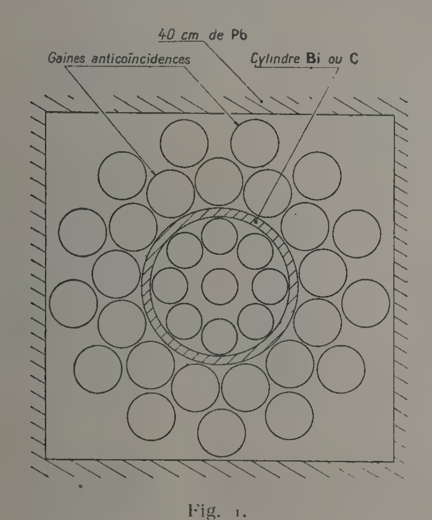



Fig. 1.

groupés autour d'un compteur central. Cet ensemble de neuf compteurs est entouré d'un cylindre de bismuth (ou de graphite) de 4 mm d'épaisseur, de 130 mm de longueur et 80 mm de diamètre. Une gaine double de 26 compteurs dits cosmiques (diamètre 25 mm; paroi de nickel de 5/10e de millimètre; longueur, 500 mm) entoure complètement l'ensemble.

Dans un second montage (*fig.* 2), le dispositif des huit compteurs, du compteur central et du cylindre de bismuth est respecté. Mais, entre une première couche de 13 compteurs cosmiques et une seconde de 27 identiques, il est possible de mettre des écrans de différentes matières, jusqu'à 3 cm d'épaisseur, sous forme d'un cylindre de 50 cm de long.

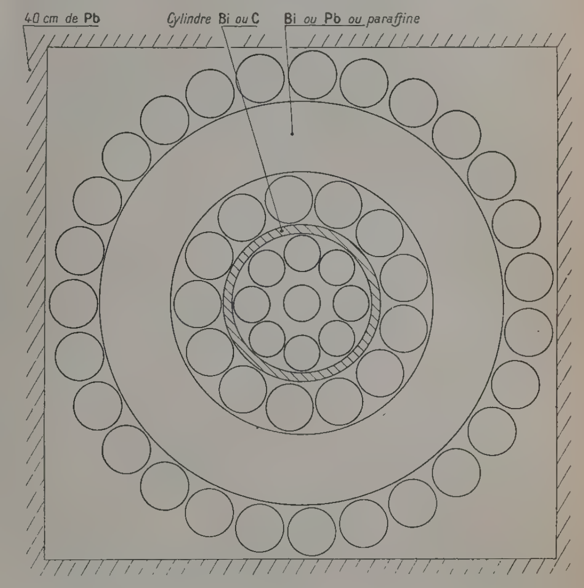



Fig. 2.

C. Dispositif électronique. — Un « hodoscope » [12] à 14 canaux, réalisé au C. E. A. par MM. Chaminade, Fiehrer, Maillard et Malé, permet de mesurer le taux de comptage du compteur central, avant et après le blocage par la gaine anticoïncidence, ainsi que les coïncidences entre le compteur central et n'importe lequel des huit compteurs qui l'entourent. L'enregistrement des coïncidences entre le compteur central et les huit compteurs qui l'entourent est fait par une machine à sténotyper dont chaque lettre correspond à un « canal » de l'hodoscope. Il a été possible ainsi de « doubler » six des huit canaux et de vérifier, au cours du temps, l'efficacité de l'électronique et de l'enregistreur.

Un certain nombre de dispositions particulières ont été prises. Le signal du compteur central, dit maître, a été retardé de quelques microsecondes afin qu'un « retard » au déclenchement d'un compteur de la gaine n'empêche pas le blocage [13]. La gaine anticoïncidence ne pouvant bloquer les coups secondaires du compteur maître, ceux-ci ont été éliminés par un circuit à temps mort placé sur le compteur.

Le couplage d'un grand nombre de compteurs composant la gaine anticoïncidence introduit un

défaut de blocage dû à la grande durée de la décharge dans ces compteurs. Un circuit de couplage a été établi pour éliminer ce risque.

Afin de donner à chaque canal le même temps mort bien défini, on a introduit un temps mort général supérieur au temps mort propre à chacun des canaux. Il a été pris égal à 1 s pour éviter des chevauchements sur l'appareil enregistreur. Les pertes introduites par ces modifications, vu le faible taux de coïncidences de l'expérience, ne sont que de 1 pour 100.

**Vérifications expérimentales préliminaires.**
1° Activité due aux compteurs eux-mêmes. — Dans le dispositif n° 1, nous avons utilisé pour la confection du cylindre d'épaisseur 4 mm entourant les compteurs : du graphite, du magnésium (contenant 0,5 pour 100 de cuivre et de manganèse), de l'acier ordinaire, du laiton (cuivre 60 pour 100, zinc 40 pour 100), du cadmium, de l'étain (fourni par la maison Johnson-Matthey, Londres), du bismuth, du plomb très ancien et de l'araldite. Le remplacement de ces matériaux l'un par l'autre ne modifie pas de façon mesurable les divers comptages donnés par l'hodoscope. Il est raisonnable d'admettre qu'ils étaient tous dépourvus d'activité propre. Par contre, les échantillons d'aluminium ou d'alliages d'aluminium ont présenté systématiquement une activité. Seul, un échantillon d'aluminium norvégien raffiné deux fois à 99,999 de pureté, qui nous a été confié obligeamment par M. Calvet de l'O.N.E.R.A., s'est avéré inactif. Le molybdène et le cadmium (à 0,5 pour 100 de Pb, de provenance Prolabo) se sont également montrés actifs.

La présence d'une contamination radioactive de l'aluminium avait déjà été signalée par le groupe de Libby [14]. Par contre, nous n'avons pas trouvé d'activité dans le laiton alors qu'il signale une telle activité pour le cuivre.

Dans ces conditions, nous avons cherché à diminuer l'activité des compteurs en remplaçant certains éléments constitutifs. Le mordançage de la coque au $Cr_2O_7K_2$ a été remplacé par un mordançage au $Cr_2O_7Na_2$, le fil de molybdène par un fil de nickel (provenance Johnson-Matthey, Londres), les embouts isolants en sibor par des embouts en araldite moulée.

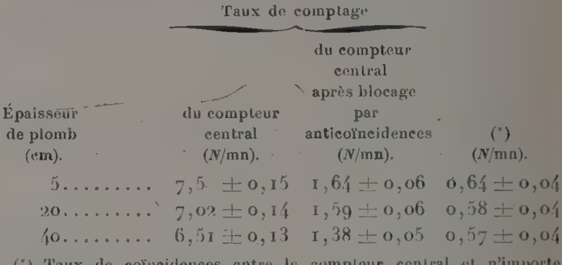
Les résultats ont été les suivants :

| | Taux de comptage du compteur central (N/mn). | Taux de comptage du même après blocage par anticoïncidence (N/mn). | (*) (N/mn). |
|---|---|---|---|
| Compteurs de série......... | 8,60 ± 0,17 | 3,19 ± 0,13 | 1,90 ± 0,13 |
| Compteurs après modification... | 6,82 ± 0,14 | 1,47 ± 0,06 | 0,69 ± 0,05 |

(*) Taux de coïncidences entre le compteur central et n'importe lequel des huit autres compteurs.

2° Influence des absorbeurs extérieurs. — Dans le premier dispositif, avec un cylindre de 4 mm de graphite, nous avons entouré complètement notre ensemble de 5 cm de plomb, puis de 20 et de 40 cm de plomb (d'un poids total de 18 t).

Les résultats ont été les suivants :



| Épaisseur de plomb (cm). | Taux de comptage du compteur central (N/mn). | Taux de comptage du compteur central après blocage par anticoïncidences (N/mn). | (*) (N/mn). |
|---|---|---|---|
| 5......... | 7,5 ± 0,15 | 1,64 ± 0,06 | 0,64 ± 0,04 |
| 20......... | 7,02 ± 0,14 | 1,59 ± 0,06 | 0,58 ± 0,04 |
| 40......... | 6,51 ± 0,13 | 1,38 ± 0,05 | 0,57 ± 0,04 |

(*) Taux de coïncidences entre le compteur central et n'importe lequel des huit autres compteurs.

Ces résultats montrent qu'avec 20 cm de plomb, on peut arrêter la totalité de l'activité due aux murs, au sol, etc. et qu'il y a peu de différence avec une protection de 5 cm de plomb dans un endroit inactif.

Afin de vérifier si une activité n'était pas due au plomb lui-même, nous avons remplacé le premier lit de briques de plomb de 5 cm d'épaisseur par un lit de briques de fonte. Les résultats ont été les suivants :

| | Taux de comptage du compteur central (N/mn). | Taux de comptage du même après blocage (N/mn). | Nombre de coïncidences enregistrées (N/mn). |
|---|---|---|---|
| Murs de 40 cm Pb........... | 6,51 ± 0,13 | 1,38 ± 0,05 | 0,57 ± 0,04 |
| Murs de 5 cm de fonte + 35 cm Pb........... | 6,75 ± 0,13 | 1,42 ± 0,05 | 0,65 ± 0,04 |

Ces résultats montrent que le plomb de protection n'est pas actif et qu'un élément plus léger que le plomb semble au contraire accroître le taux de comptage.

Afin de vérifier l'influence d'éléments plus légers, nous avons entouré notre dispositif de 40 cm de graphite pur inactif. Les résultats ont été les suivants :

| | Taux de comptage du compteur central (N/mn). | Taux de comptage du même après blocage (N/mn). | Nombre de coïncidences enregistrées (N/mn). |
|---|---|---|---|
| Murs de 40 cm de graphite... | 7,82 ± 0,16 | 2,31 ± 0,09 | 1,34 ± 0,09 |

Dans les conditions où les expériences ont été faites (10 m sous terre, local inactif), on voit que l'on obtient le plus faible taux de coïncidences à partir d'une protection de 20 cm de plomb inactif.

3° Activité de l'air ambiant. Efficacité du blocage par la gaine anticoïncidence. — Dans le dispositif décrit plus haut, nous avons essayé de voir si l'air ambiant n'apportait pas une activité supplémentaire. Nous avons fait une mesure comparative en mettant une circulation d'azote sous pression à l'intérieur de notre dispositif. Aucune différence notable n'a été enregistrée et il nous a semblé très peu probable que le gaz comprimé utilisé (fabriqué à la Société l'Air Liquide) ait la même « activité » que l'air ambiant.

Nous avons aussi mis en bout de notre gaine anticoïncidence d'autres compteurs de blocage afin de faire un cylindre complètement fermé. Aucune différence n'a été enregistrée.

4° Contribution du rayonnement $\gamma$. — Afin de déceler la contribution du rayonnement non chargé (rayonnement $\gamma$, neutrons) non bloqué par la gaine anticoïncidence, nous avons utilisé le dispositif n° 2 décrit plus haut. La gaine extérieure de 27 compteurs est mise comme gaine d'anticoïncidences de blocage. Entre cette gaine et l'ensemble des 13 compteurs (dits cosmiques) nous avons intercalé des cylindres d'épaisseur variable et de 50 cm de long. Nous avons enregistré : les coïncidences entre le compteur central et n'importe lequel des huit compteurs qui l'entourent ainsi que les coïncidences entre le compteur central et la gaine de 13 compteurs.

Les résultats ont été les suivants :

| | Taux de comptage | | Taux de coïncidences | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nature et épaisseur du cylindre intermédiaire. | du compteur central ($N$/mn). (1). | du compteur central après blocage par la couche de 27 compteurs ($N$/mn). (2). | totales (y compris la gaine de 13 G. M.) ($N$/mn). (3). | du compteur central et de la gaine de 13 compteurs ($N$/mn). (4). | du compteur central et de n'importe lequel des huit compteurs ($N$/mn). (5) (*). |
| Pb 1,5 cm........... | 6,93 ± 0,14 | 1,75 ± 0,07 | 0,63 ± 0,04 | 0,05 | 0,58 |
| Pb 3 cm........... | 7,40 ± 0,15 | 2,69 ± 0,10 | 0,87 ± 0,05 | 0,14 | 0,73 |
| Bi 3 cm........... | 7,78 ± 0,15 | 2,76 ± 0,10 | 0,82 ± 0,05 | 0,12 | 0,70 |
| Paraffine 2,5 cm..... | 6,87 ± 0,14 | 1,87 ± 0,07 | 0,85 ± 0,05 | 0,11 | 0,74 |
| Rien................ | 7,27 ± 0,15 | 2,42 ± 0,10 | 0,76 ± 0,05 | 0,15 | 0,61 |

(*) (5) + (4) = 3.

On constate que le nombre de coïncidences a augmenté légèrement avec la quantité de matière introduite contrairement à ce que l'on attendrait s'il s'agissait d'un effet $\gamma$. La faible augmentation observée est insuffisante pour qu'il ait été possible d'étudier si elle est ou non significative et de connaître son origine.

5° Effet dû a la nature du cylindre de 4 mm. — Dans le premier dispositif, sous 40 cm de Pb, nous avons cherché s'il existait une différence entre des cylindres de 4 mm de matériaux différents (légers et lourds). Les résultats ont été les suivants :

| | Taux de comptage | | |
|---|---|---|---|
| Nature du cylindre 4 mm. | du compteur central ($N$/mn). | du compteur central après blocage ($N$/mn). | Taux de coïncidences ($N$/mn). |
| Bismuth........ | 6,61 ± 0,13 | 1,44 ± 0,05 | 0,65 ± 0,04 |
| Graphite........ | 6,51 ± 0,13 | 1,38 ± 0,05 | 0,57 ± 0,04 |

La faible différence qui existe entre ces cylindres aussi divers (rapport 4 entre les densités) montre que le rayonnement compté (vraisemblablement des électrons) est créé dans une couche superficielle du cylindre.

**Résultats expérimentaux.** — Dans le dispositif n° 1 enfermé dans un château de plomb de 40 cm de mur, nous avons accumulé les résultats de 12 960 mn d'expérience portant sur 9 jours complets mais non suivis. Les moyennes trouvées ont été les suivantes :

| | ($N$/mn). | (*). |
|---|---|---|
| Taux de comptage des 26 compteurs en anticoïncidence.................... | 335 | + 5<br>— 14 |
| Taux de comptage du compteur central........................ | 6,82 | + 0,07<br>— 0,16 |
| Taux de comptage du compteur central après blocage par anticoïncidence... | 1,47 | + 0,02<br>— 0,09 |
| Taux de coïncidences................ | 0,69 | + 0,05<br>— 0,04 |
| Taux des coïncidences du compteur central et d'un seul compteur quelconque........................ | 0,47 | + 0,03<br>— 0,03 |
| Taux des coïncidences du G. M. central et de plusieurs autres compteurs.... | 0,22 | + 0,03<br>0,01 |

(*) Plus grand écart trouvé (moyenne faite sur 24 h).

Nous nous sommes attachés aux coïncidences du compteur central et d'un seul compteur, coïncidences

que nous avons interprétées comme dues à des particules issues du radiateur. Les autres types de coïncidences ne peuvent être interprétés simplement (diffusion, sens non défini, etc.). Le cumul de ces coïncidences par fractions de 3 h est le suivant :

| Heures solaires. | G. M. nos 8. | 7. | 6. | 5. | 4. | 3. | 2. | 1. | Total. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 h 30 à 13 h 30... | 69 | 106 | 97 | 99 | 88 | 103 | 97 | **106** | 765 |
| 13 h 30 à 16 h 30... | 110 | 102 | 114 | 113 | 101 | 113 | **97** | 114 | 864 |
| 16 h 30 à 19 h 30... | 99 | 83 | 111 | 86 | 74 | **93** | 89 | 109 | 744 |
| 19 h 30 à 22 h 30... | 105 | 86 | 89 | 95 | **61** | 70 | 92 | 100 | 698 |
| 22 h 30 à 1 h 30... | 88 | 94 | 96 | **113** | 81 | 95 | 99 | 108 | 774 |
| 1 h 30 à 4 h 30... | 86 | 110 | **94** | 108 | 75 | 71 | 83 | 108 | 735 |
| 4 h 30 à 7 h 30... | 90 | **79** | 82 | 86 | 83 | 96 | 107 | 100 | 723 |
| 7 h 30 à 10 h...... | **88** | 75 | 82 | 95 | 92 | 95 | 109 | 95 | 731 |
| Total... | 735 | 735 | 765 | 795 | 655 | 736 | 773 | 840 | 6 034 |

*N. B.* — Les compteurs en caractères gras sont les compteurs face au soleil.

Les résultats montrent qu'il n'y a pas de compteurs privilégiés ni de périodes privilégiées.

En examinant le tableau et la figure 3, on voit que le compteur n° 1 est face au soleil de 10 h 30 à 13 h 30; que de 13 h 30 à 16 h 30, c'est le compteur n° 2, etc. On peut ainsi additionner l'ensemble des coïncidences pour lequel un compteur est face au soleil, un autre opposé, etc.

On obtient les résultats suivants :

| Position du compteur par rapport au soleil. | Nombre de coïncidences. |
|---|---|
| De face 0° | 731 |
| A = 45° | 770 |
| | 688 |
| A = 90° | 768 |
| | 755 |
| A = 135° | 795 |
| | 746 |
| Opposé 180° | 780 |

Ces valeurs montrent qu'à la précision statistique près on ne peut définir aucune direction privilégiée par rapport au soleil ce qui peut indiquer soit que l'effet envisagé n'existe pas, soit qu'il ne représente qu'une faible partie de l'effet résiduel observé.

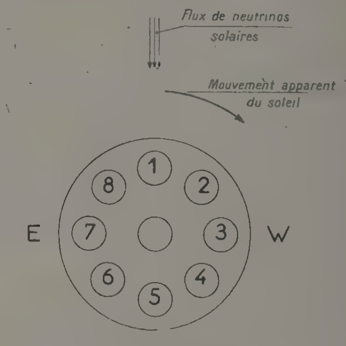



Fig. 3.

Nous sommes heureux de remercier M. A. Berthelot, Chef du Service de Physique nucléaire du C. E. A. pour les fructueuses discussions que nous avons eues au cours de ce travail ainsi que M. Maillard pour l'aide efficace qu'il nous a apportée dans l'exécution des mesures.

Manuscrit reçu le 25 janvier 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Fermi E. — *Z. Physik*, 1934, **88**, 161.
[2] Nahmias E. — *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1935, **31**, 99.
[3] Barrett J. H. — *Phys. Rev.*, 1950, **79**, 907.
[4] Crane H. R. — *Rev. Mod. Physics*, 1948, **20**, 294.
[5] Wollan E. O. — *Phys. Rev.*, 1947, **72**, 445.
[6] Saxon D. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 986.
[7] Reines F. et Cowan C. L. — *Phys. Rev.*, 1953, **92**, 830.
[8] Bethe H. A. et Critchfield C. L. — *Phys. Rev.*, 1938, **54**, 248.
[9] Bethe H. A. — *Phys. Rev.*, 1939, **55**, 434.
[10] Salpeter E. E. — *Phys. Rev.*, 1952, **88**, 547.
[11] Schatzman E. — *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **232**, 1740.
[12] Rogozinski A. — Thèse. *Ann. Phys.*, 1945, **20**, 391.
[13] Valladas G. — *J. Physique Rad.*, 1951, **12**, 53 A.
[14] Anderson E. C., Arnold J. R. et Libby W. F. — *Rev. Sc. Instr.*, 1951, **22**, 225.

# ÉTUDE D'UNE FAMILLE DE FONCTIONS D'ONDE APPROCHÉES POUR L'ATOME D'HÉLIUM

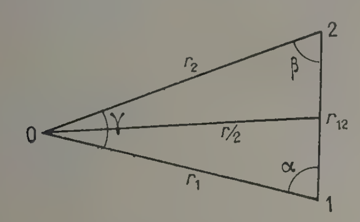
Par G. MUNSCHY,
Faculté des Sciences de Strasbourg.

**Sommaire.** — La méthode de formation de solutions approximatives décrite antérieurement et appliquée à l'état fondamental de l'hélium [1] a été étendue aux états $n = 2$. La fonction de choc $u_{k0}(r_{12})$ utilisée assure un bon comportement de la solution au voisinage du pôle du potentiel d'interaction $\frac{1}{r_{12}}$.
Ce caractère est important dans le cas de l'état fondamental, mais joue un rôle moins marqué dans le cas des états excités. Les niveaux d'énergie correspondants sont moins bien déterminés. Les écarts singulet-triplet calculés sont trop grands. Cependant, les résultats sont encore relativement satisfaisants si l'on considère la simplicité de la méthode de formation des fonctions d'essai. Ils sont, en tous cas, très supérieurs à ceux obtenus avec la famille de fonctions hydrogénoïdes comportant comme unique paramètre la charge effective $Z'$.

**Notations.** — Les coordonnées sphériques $r$, $\theta$, $\varphi$ se rapportent aux vecteurs

$$\mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1$$

et portent en indice respectivement 1, 2, 12 ou rien.




Les grandeurs définissant le triangle de position sont données par la figure ci-dessus. Les principales fonctions intervenant dans cette étude sont :

$\psi_{nlm}(\mathbf{r}_1)$, fonction d'onde de l'atome hydrogénoïde avec sa partie radiale $R_{nl}(r_1)$ et sa partie angulaire $Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1)$;

$R_{nl}(r_1)$, dans l'expression de laquelle rentre le polynome de Laguerre associé

$$\mathsf{L}_{l+n}^{2l+1}\left(\frac{2Z}{n} r_1\right);$$

$Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1)$, fonction sphérique normée, comprenant le polynome de Legendre associé $P_{lm}(\cos\theta_1)$;

$u_{k0}(r_{12})$, fonction de choc correspondant à la fonction $R_{n0}$ dans le cas du spectre continu. Elle fait intervenir la fonction hypergéométrique dégénérée;

$J_{l+\frac{1}{2}}(\rho)$, fonction de Bessel à indice demi-entier. Elle figure dans la fonction d'onde de la particule libre en coordonnées sphériques.

Les unités employées sont les unités atomiques de Hartree.

**1. Fonction d'onde d'interaction.** — La fonction d'onde rigoureuse $\psi$ est solution du problème d'extremum lié

$$\delta \int \left\{ \frac{1}{2} \left| \vec{\nabla} \psi \right|^2 + V |\psi|^2 \right\} d\tau = 0,$$

sous la condition supplémentaire

$$\int |\psi|^2 d\tau = 1.$$

L'intégrale s'étend à tout l'espace des configurations. L'équation d'Euler de ce problème de variation est l'équation de Schrödinger

$$-\frac{1}{2}\Delta\psi + (V - E)\psi = 0. \tag{1}$$

Dans le cas qui nous occupe, l'espace des configurations est à six dimensions. L'énergie potentielle $V$ se scinde en deux parties :

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= -\frac{Z}{r_1} - \frac{Z}{r_2}, \\ V_2 &= \frac{1}{r_{12}}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Dans le système de coordonnées défini par $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$, l'énergie d'interaction $V_2$ a pour expression

$$\frac{1}{r_{12}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} a_l \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(1) Y^*_{lm}(2). \tag{3}$$

$$a_l = \begin{cases} \dfrac{r_1^l}{r_2^{l+1}} & \text{si} \quad r_1 < r_2, \\[2ex] \dfrac{r_2^l}{r_1^{l+1}} & \text{si} \quad r_2 < r_1. \end{cases}$$

Il est également possible de définir un système de coordonnées par les vecteurs **r** et $\mathbf{r}_{12}$. $V_2$ s'exprime alors de façon très simple, tandis que $V_1$ admet un développement analogue à (3), mais sans les termes impairs.

Il semble avantageux d'associer au potentiel $V_1$ une fonction $\psi_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, au potentiel $V_2$ une fonction d'interaction $\psi_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{12})$. Analytiquement, cette idée se traduit en prenant $\psi$ sous forme de produit

$$\psi = \psi_1 \psi_2.$$

Dans le problème sans interaction, $\psi_2$ serait égale à 1. Les deux équations d'Euler découlant de l'énoncé intégral se ramènent alors à une seule, qui s'écrit

$$\psi_2\left[-\frac{1}{2}\Delta + (V_1 - E_1)\right]\psi_1 + \psi_1\left[-\frac{1}{2}\Delta + (V_2 - E_2)\right]\psi_2 - \vec{\nabla}\psi_1 . \vec{\nabla}\psi_2 = 0. \quad (4)$$

La somme

$$E = E_1 + E_2$$

serait l'énergie du système, si le produit scalaire $\vec{\nabla}\psi_1 . \vec{\nabla}\psi_2$ était nul. Dire que la fonction $\psi_2$ décrit l'interaction entre les deux électrons revient à prendre pour $\psi_1$ la solution du problème sans interaction. Celle-ci s'écrit sous forme de produit de deux fonctions hydrogénoïdes relatives respectivement à l'électron 1 et à l'électron 2. Dans ces conditions

$$\left[-\frac{1}{2}\Delta + (V_1 - E_1)\right]\psi_1 = 0, \quad (5)$$

et l'équation déterminant $\psi_2$ s'écrit

$$\left[-\frac{1}{2}\Delta + (V_2 - E_2)\right]\psi_2 - \frac{\vec{\nabla}\psi_1}{\psi_1}\vec{\nabla}\psi_2 = 0. \quad (6)$$

2. **Étude de l'état fondamental.** — La fonction d'onde du problème sans interaction est

$$\psi_1 = e^{-Z(r_1 + r_2)}.$$

$$-\frac{\vec{\nabla}\psi_1}{\psi_1}\vec{\nabla}\psi_2 = Z[\partial_{r_1} + \partial_{r_2} + (\cos\alpha + \cos\beta)\,\partial_{r_{12}}]\psi_2.$$

En passant aux variables $r$, $r_{12}$, $q = \cos\omega$, l'équation (6) devient

$$\left[\frac{1}{r^2}\partial_r r^2 \partial_r + \frac{1}{r_{12}^2}\partial_{r_{12}} r_{12}^2 \partial_{r_{12}} + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_{12}^2}\right)\partial_q (1 - q^2)\,\partial_q - \frac{1}{r_{12}} + E_2\right]\psi_2 + \frac{Z}{2} r r_{12}\, q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \times \left[\frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r_{12}}\partial_{r_{12}} + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_{12}^2}\right)\frac{1 - q^2}{q}\partial_q\right]\psi_2 - \frac{Z}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)(r\partial_r + r_{12}\partial_{r_{12}})\psi_2 = 0, \quad (7)$$

avec

$$r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + r_{12}^2 - 2 r r_{12} q}.$$

$$r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + r_{12}^2 + 2 r r_{12} q}.$$

Il convient maintenant de faire une approximation permettant le calcul effectif d'une solution approchée. Choisissons comme caractère à respecter pour cette solution $\psi_2$ un bon comportement au voisinage du pôle du potentiel d'interaction. A cet effet, $\psi_2$ est assujettie à satisfaire à l'équation (7) limitée à son terme principal dans le voisinage considéré. L'équation ainsi réduite s'écrit

$$\left[\frac{1}{r^2}\partial_r r^2 \partial_r + \frac{1}{r_{12}^2}\partial_{r_{12}} r_{12}^2 \partial_{r_{12}} + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_{12}^2}\right)\partial_q (1 - q^2)\,\partial_q - \frac{1}{r_{12}} + E_2\right]\psi_2 - 2Z\left[\partial_r - \frac{q(1 - q^2)}{r}\partial_q\right]\psi_2 = 0. \quad (8)$$

On vérifie que les fonctions $\psi_2$ ainsi sélectionnées satisfont à l'équation rigoureuse (7) au deuxième ordre près. Il existe une solution indépendante de la variable $q$, pour laquelle l'équation (8) devient séparable en $r$ et $r_{12}$. L'équation en $r_{12}$ correspondante définit la fonction $u_{k_0}(r_{12})$ dont l'étude a été faite dans un travail antérieur [1]. L'équation en $r$ définit une fonction $f(r)$ telle que

$$f'' + \frac{2}{r}f' - 2Zf' = \lambda^2 f.$$

L'énergie $E_2$ est donnée par $k^2 - \lambda^2$.

Le changement de fonction inconnue

$$f = e^{Zr}\varphi(r)$$

fournit la nouvelle équation différentielle

$$\varphi'' + \frac{2}{r}\varphi' + \frac{2Z}{r}\varphi = (Z^2 + \lambda^2)\varphi. \quad (9)$$

C'est l'équation radiale du problème de l'hydrogène. Sa solution dans le spectre continu s'écrit

$$\varphi = e^{-\sqrt{Z^2+\lambda^2}\,r}\,{}_1F_1\left(1 - \frac{Z}{\sqrt{Z^2+\lambda^2}}, 2, 2\sqrt{Z^2+\lambda^2}\,r\right).$$

Le symbole ${}_1F_1$ désigne la fonction hypergéométrique dégénérée. Cette solution doit être écartée parce qu'elle rend impossible la normation. Il reste la solution dans le spectre discontinu.

$$\varphi_\nu = R_{\nu 0}(r) = e^{-\frac{Z}{\nu}r}\,\mathbf{L}_\nu^1\left(\frac{2Z}{\nu}r\right).$$

Dans l'expression de l'énergie $E_2$, $-\lambda^2$ est à remplacer par $Z^2\left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right)$. On trouve ainsi une série discrète de fonctions $f_\nu(r)$ dont les premières

sont

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= 1, \\ f_2 &= \left(1 - \frac{Z}{2} r\right) e^{\frac{Z}{2} r}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_\nu &= e^{Z\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) r} \mathsf{L}_\nu^1\left(\frac{2Z}{\nu} r\right). \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

On voit qu'en sélectionnant $\psi_2 = u_{k0}(r_{12})$, on obtient la fonction d'interaction la plus simple possible. Plus généralement

$$\psi_2 = u_{k0}(r_{12}) f_\nu(r). \quad (11)$$

3. **Étude des états S.** — La fonction d'onde du problème sans interaction dans le cas d'états simplement excités s'écrit

$$\psi_1 = \psi_{n00}(1)\, \psi_{100}(2).$$

En posant

$$F_n(1) = e^{\frac{n-1}{n} Z r_1} \mathsf{L}_n^1\left(\frac{2Z}{n} r_1\right),$$

la fonction d'onde $\psi_1$ s'écrit encore

$$\psi_1 = e^{-Z(r_1 + r_2)} F_n(1)$$

$$-\frac{\vec{\nabla}\psi_1}{\psi_1} \vec{\nabla}\psi_2 = Z[\partial_{r_1} + \partial_{r_2} + (\cos\alpha + \cos\beta)\partial_{r_{12}}]\psi_2 - \frac{F'_n(1)}{F_n(1)}[\partial_{r_1} + \cos\alpha\, \partial_{r_{12}}]\psi_2.$$

L'équation (6) correspondante diffère de celle de l'état fondamental (7) par le terme additif au premier membre

$$\frac{F'_n(1)}{F_n(1)}[\partial_{r_1} + \cos\alpha\, \partial_{r_{12}}]\psi_2 = \frac{1}{2 r_1} \frac{F'_n(1)}{F_n(1)} \left[ (r - r_{12} q)\partial_r + (r_{12} - r q)\partial_{r_{12}} - \frac{r^2 + r_{12}^2}{r r_{12}} (1 - q^2)\partial_q \right] \psi_2. \quad (12)$$

Dans le voisinage de $r_{12} = 0$, ce terme peut être approché par

$$\frac{F'_n\left(\frac{r}{2}\right)}{F_n\left(\frac{r}{2}\right)} \left[ \partial_r - q\,\partial_{r_{12}} - \frac{1 - q^2}{r_{12}} \partial_q \right] \psi_2. \quad (13)$$

Il n'est plus possible de trouver une solution indépendante de $q$. L'équation n'est plus séparable. En fait, il faut considérer les combinaisons symétrique et antisymétrique. Elles introduisent des termes analogues provenant de

$$\tilde{\psi}_1 = \psi_{n00}(2)\psi_{100}(1).$$

Il suffit de changer $q$ en $-q$, $r_1$ en $r_2$ et inversement. Formons la combinaison symétrique

$$(\psi_1 + \tilde{\psi}_1)\psi_2.$$

Le produit scalaire $\frac{\vec{\nabla}\psi_1}{\psi_1} \vec{\nabla}\psi_2$ est à remplacer par

$$\frac{\vec{\nabla}(\psi_1 + \tilde{\psi}_1)}{\psi_1 + \tilde{\psi}_1} \vec{\nabla}\psi_2.$$

Dans le voisinage considéré, nous pouvons l'approcher par

$$\frac{1}{2}\left[ \frac{\vec{\nabla}\psi_1}{\psi_1} + \frac{\vec{\nabla}\tilde{\psi}_1}{\tilde{\psi}_1} \right] \vec{\nabla}\psi_2. \quad (14)$$

Dans ces conditions, le terme additif (13) est symétrique et se réduit à

$$\frac{F'_n\left(\frac{r}{2}\right)}{F_n\left(\frac{r}{2}\right)} \partial_r \psi_2. \quad (15)$$

L'équation redevient séparable en $r$ et $r_{12}$. On retrouve la fonction $u_{k0}(r_{12})$. L'équation correspondante en $f$ s'écrit

$$f'' + \frac{2}{r} f' - 2Z f' + \frac{F'_n\left(\frac{r}{2}\right)}{F_n\left(\frac{r}{2}\right)} f' = \lambda^2 f. \quad (16)$$

La solution la plus simple est encore $f = 1$, avec $\lambda^2 = 0$. Il est toutefois permis de penser que l'approximation faite est moins bonne que dans le cas de l'état fondamental. La raison en est que la séparation (14) effectuée dans le produit scalaire constitue une approximation supplémentaire.

En formant la combinaison antisymétrique

$$(\psi_1 - \tilde{\psi}_1)\psi_2,$$

le produit scalaire de l'équation (3) se présente sous forme indéterminée. L'étude offre, à la fois, plus de difficulté et moins d'intérêt. Les configurations considérées sont, en effet, des moins probables.

Nous verrons, par l'examen direct d'un état antisymétrique, que la fonction d'interaction la plus simple n'est généralement plus $u_{k0}(r_{12})$.

4. **États à nombre quantique orbital** $l \neq 0$. — $\psi_2$ ne dépend que des variables définissant le triangle de position. En effet, dans une étude relative aux états $P$ des atomes à deux électrons [2], Breit a montré que la dépendance angulaire de la fonction d'onde est donnée par $Y_{lm}(1)$ uniquement. Nous admettrons qu'il en est toujours ainsi. Le nombre quantique magnétique sera pris nul.

Dans ces conditions, le produit scalaire de l'équation (6) se développe de la façon suivante :

$$\vec{\nabla}\psi_1 . \vec{\nabla}\psi_2 = (\vec{\nabla} r_1\, \partial_{r_1}\psi_1 + \vec{\nabla}\rho_1\, \partial_{\rho_1}\psi_1 + \vec{\nabla} r_2\, \partial_{r_2}\psi_1) \times (\vec{\nabla} r_1\, \partial_{r_1}\psi_2 + \vec{\nabla} r_2\, \partial_{r_2}\psi_2 + \vec{\nabla} r_{12}\, \partial_{r_{12}}\psi_2).$$

Les seules contributions sont fournies par les produits

$$\left(\vec{\nabla} r_1\right)^2 = \left(\vec{\nabla} r_2\right)^2 = 1.$$

$$\vec{\nabla} r_1 . \vec{\nabla} r_{12} = \cos\alpha,$$

$$\vec{\nabla} r_2 . \vec{\nabla} r_{12} = \cos\beta,$$

$$\vec{\nabla} p_1 . \vec{\nabla} r_{12} = \vec{\nabla} \cos\theta_1 . \vec{\nabla} r_{12} = \frac{r_2}{r_1 r_{12}} (\cos\gamma \cos\theta_1 - \cos\theta_2).$$

Dans le voisinage de $r_{12} = 0$, on peut faire l'approximation

$$\vec{\nabla} \cos\theta_1 . \vec{\nabla} r_{12} \simeq -2 \frac{r_{12}}{r^2} (1 - q^2)^2 \cos\theta. \qquad (17)$$

Ce terme est du premier ordre en $r_{12}$. Il résulte que la fonction d'interaction la plus simple sera encore $u_{k0}(r_{12})$, du moins pour les états symétriques.

5. **Étude d'un état antisymétrique :** $2^3 P$. — La fonction $\psi_2 = u_{k0}(r_{12})$ ne permet pas d'annuler le terme perturbateur au voisinage de l'origine. Nous nous proposons de trouver directement une nouvelle fonction $\psi_2$ assurant le bon comportement dans le domaine considéré. Le point de départ est l'équation de Breit [2]

$$\left[L + \frac{2}{r_1^2} (\mathrm{cotg}\,\gamma\, \partial_\gamma - 1)\right] F + \frac{2}{r_2^2 \sin\gamma} \partial_\gamma \tilde{F} = 0. \qquad (18)$$

L'opérateur $L$ est défini par

$$L = \frac{1}{r_1^2} \partial_{r_1} r_1^2 \partial_{r_1} + \frac{1}{r_2^2} \partial_{r_2} r_2^2 \partial_{r_2} + \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right) \frac{1}{\sin\gamma} \partial_\gamma \sin\gamma \partial_\gamma + 2(E - V).$$

La solution rigoureuse est donnée par la combinaison

$$\psi = F \cos\theta_1 - \tilde{F} \cos\theta_2. \qquad (19)$$

En approchant la fonction $F$ par le produit

$$R_{21}(r_1) R_{10}(r_2) \psi_2(r_{12}).$$

et en tenant compte du fait que $r_{12}$ est petit devant $r$, c'est-à-dire

$$\cos\alpha + \cos\beta \simeq 0,$$

on aboutit à l'équation différentielle

$$\frac{1}{r_{12}^2} d_{r_{12}} r_{12}^2 d_{r_{12}} \psi_2 + \left(E_2 - \frac{1}{r_{12}}\right) \psi_2 = -\frac{2}{r_{12}} d_{r_{12}} \psi_2. \qquad (20)$$

En posant

$$\psi_2 = \frac{u_{k1}(r_{12})}{r_{12}},$$

on définit une nouvelle fonction de choc $u_{k1}(r_{12})$. Elle satisfait à l'équation

$$-\left[\frac{1}{r_{12}^2} d_{r_{12}} r_{12}^2 d_{r_{12}} - \frac{2}{r_{12}^2}\right] u_{k1} + \frac{1}{r_{12}} u_{k1} = k^2 u_{k1}. \qquad (21)$$

Son expression analytique est

$$u_{k1}(r_{12}) = e^{-ikr_{12}} r_{12}\, {}_1F_1\left(2 + \frac{1}{2ik}, 4, 2ikr_{12}\right). \qquad (22)$$

On rappelle que $u_{k0}(r_{12})$ a pour expression

$$u_{k0}(r_{12}) = e^{-ikr_{12}}\, {}_1F_1\left(1 + \frac{1}{2ik}, 2, 2ikr_{12}\right). \qquad (23)$$

6. **Méthode des équations semi-séparables.** — Nous allons montrer que la méthode des équations semi-séparables [1] n'est pas équivalente en général à la méthode d'approximation décrite valable pour $r_{12}$ petit. Il n'y a équivalence que pour les fonctions à un paramètre.

La méthode des équations semi-séparables consiste à négliger dans l'équation rigoureuse (6) le produit scalaire $\vec{\nabla}\psi_1 . \vec{\nabla}\psi_2$ pour la détermination de la fonction $\psi_2$.

Les fonctions $\psi_1$ et $\psi_2$ sélectionnées satisfont aux équations

$$\left.\begin{aligned} \left[-\frac{1}{2}\Delta + (V_1 - E_1)\right]\psi_1 = 0, \\ \left[-\frac{1}{2}\Delta + (V_2 - E_2)\right]\psi_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Les solutions correspondantes sont

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \psi_{nlm}(\mathbf{r}_1)\psi_{100}(\mathbf{r}_2), \\ \psi_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{12}) &= u_{k0}(r_{12}) \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(i\lambda r)}{\sqrt{i\lambda r}} P_l(q). \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

$J_{l+\frac{1}{2}}(i\lambda r)$ est la fonction de Bessel modifiée à indice demi-entier, $P_l(q)$ le polynôme de Legendre. Les énergies afférentes aux deux fonctions $\psi_1$ et $\psi_2$ sont respectivement

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= -\frac{Z^2}{2} - \frac{Z^2}{2n^2}, \\ E_2 &= k^2 - \lambda^2. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

La condition de normation demande que $\lambda$ soit inférieur à $Z$. Pour $l = \lambda = 0$, on retrouve

$$\psi_2 = u_{k0}(r_{12}).$$

Il est à remarquer que la fonction

$$\psi_2 = u_{k0}(r_{12}) \frac{\mathrm{sh}\,\lambda r}{\lambda r}$$

obtenue pour $l = 0$ et utilisée antérieurement dans un calcul de l'état fondamental [1] ne rentre pas dans la classe des fonctions définies par (11).

7. **Méthode de variation de Ritz.** — Pour déterminer l'énergie du niveau, on ajuste les paramètres numériques de façon à rendre extremum

$$E = \frac{(\Phi, H\Phi)}{N(\Phi)}, \qquad (27)$$

$\Phi$ étant la fonction d'essai. $E'$ donne nécessairement une valeur approchée par excès de la valeur propre cherchée $\mathcal{E}$ à condition d'orthogonaliser les fonctions d'onde des différents niveaux. On détermine ainsi la meilleure fonction possible de la famille.

La fonction

$$\Phi = e^{-Z(r_1+r_2)} u_{k0}(r_{12}) \frac{\operatorname{sh} \lambda r}{\lambda r}$$

a été utilisée dans le cas de l'état fondamental. Elle a permis de déterminer la valeur propre à 1/1000$^e$ près environ [1]. Une vérification du calcul faite depuis donne plus exactement

$$E' = -2{,}899.52 \qquad \text{pour} \left\{ \begin{array}{l} k^2 = 0{,}152, \\ \lambda^2 = 0{,}333. \end{array} \right.$$

Étant donné la complexité des calculs d'intégration, l'extension aux états excités s'avère pénible. C'est pourquoi, nous nous bornons à prendre $\lambda = 0$, c'est-à-dire

$$\psi_2 = u_{k0}(r_{12}).$$

L'équation d'Euler du problème de variation est

$$H\psi_1\psi_2 = \mathcal{E}\psi_1\psi_2. \tag{28}$$

Mais la fonction $\psi_1\psi_2$ sélectionnée n'y satisfait pas. En tenant compte des équations (24), il vient

$$H\psi_1\psi_2 = E\psi_1\psi_2 - \vec{\nabla}\psi_1 \vec{\nabla}\psi_2. \tag{29}$$

Dans le cas des états excités, il convient de considérer les deux combinaisons symétrique et antisymétrique

$$\Phi^+ = (\psi_1 + \tilde{\psi}_1)\psi_2,$$
$$\Phi^- = (\psi_1 - \tilde{\psi}_1)\psi_2.$$

Elles décrivent respectivement les états para (singulets) et les états ortho (triplets) de l'hélium.

L'énergie approchée $E'$ sera donnée par

$$E' = E - \left(\psi_1\psi_2 + \varepsilon\tilde{\psi}_1\psi_2, \vec{\nabla}\psi_1.\vec{\nabla}\psi_2 + \varepsilon\vec{\nabla}\tilde{\psi}_1.\vec{\nabla}\psi_2\right) \quad (\varepsilon = \pm 1), \tag{30}$$

la fonction $\Phi^\varepsilon$ étant supposée normée. Soit $I$ l'intégrale du second membre. Elle est réelle du fait de l'hermiticité de l'opérateur $H$. On peut remarquer, par ailleurs, que la fonction $\psi_2 = u_{k_0}(r_{12})$ est réelle.

$$I = \frac{1}{2}\left(\psi_1\psi_2 + \varepsilon\tilde{\psi}_1\psi_2, \vec{\nabla}\psi_1.\vec{\nabla}\psi_2 + \varepsilon\vec{\nabla}\tilde{\psi}_1.\vec{\nabla}\psi_2\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\psi_1.\vec{\nabla}\psi_2 + \varepsilon\vec{\nabla}\tilde{\psi}_1.\vec{\nabla}\psi_2, \psi_1\psi_2 + \varepsilon\tilde{\psi}_1\psi_2\right).$$

En explicitant, on obtient

$$I = \frac{1}{4}\int \vec{\nabla}\left[(\psi_1 + \varepsilon\tilde{\psi}_1)^*(\psi_1 + \varepsilon\tilde{\psi}_1)\right]\vec{\nabla}\psi_2^2 \, d\tau.$$

La seconde formule de Green donne

$$I = -\frac{1}{4}\int (\psi_1 + \varepsilon\tilde{\psi}_1)^*(\psi_1 + \varepsilon\tilde{\psi}_1)\Delta\psi_2^2 \, d\tau.$$

Il est utile d'introduire la fonction

$$\psi_2^2 = v_{k0}(r_{12}).$$

Elle permet d'exprimer l'énergie $E'$ de façon très simple

$$E' = E + \frac{1}{4}\overline{\frac{\Delta v_{k0}}{v_{k0}}}, \qquad \text{avec} \quad E = E_1 + E_2. \tag{31}$$

8. **Mécanisme du calcul d'intégration.** — En principe, les variables d'intégration choisies sont celles de Hylleraas [3], à savoir $r_1$, $r_2$, $\gamma$ (ou $r_{12}$), $\theta_1$, $\varphi_1$ et l'angle d'orientation $\omega_1$ de l'électron 2 par rapport à l'électron 1.

Il est commode de scinder l'élément de volume $d\tau$ en deux parties et d'effectuer séparément les intégrations sur la partie angulaire ($\theta_1$, $\varphi_1$, $\omega_1$) et sur la partie radiale ($r_1$, $r_2$, $r_{12}$).

$$\left.\begin{array}{l} d\tau' = r_1 r_2 r_{12} \, dr_1 \, dr_2 \, dr_{12}, \\ d\tau'' = \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1 \, d\omega_1. \end{array}\right\} \tag{32}$$

Dans l'espace angulaire, les seules formules utiles sont

$$\left.\begin{array}{l} [Y_{l'm'}(1), Y_{lm}(1)] = 2\pi\delta_{ll'}\delta_{mm'}, \\ [Y_{l'm'}(2), Y_{lm}(1)] = 2\pi P_l(\cos\gamma)\delta_{ll'}\delta_{mm'}, \end{array}\right\} \tag{33}$$

$P_l$ étant le polynome de Legendre d'ordre $l$ non normé, $\delta$ le symbole de Kronecker.

Dans l'espace radial, Hylleraas avait introduit les variables

$$s = r_1 + r_2,$$
$$t = r_1 - r_2,$$
$$\gamma.$$

Nous leur en avons préféré d'autres

$$\sigma = \frac{s}{r_{12}},$$
$$\tau = \frac{t}{r_{12}},$$
$$r_{12}.$$

Elles ont l'avantage de séparer nettement les trois intégrations restantes, les domaines de variation étant

$$1 \leq \sigma \leq \infty,$$
$$-1 \leq \tau \leq 1,$$
$$0 \leq r_{12} \leq \infty.$$

Un seul calcul d'intégration sur $\sigma$ et $\tau$ est nécessaire dans l'évaluation de $E'$. En effet, $\dfrac{\Delta v_{k0}}{v_{k0}}$ s'obtient à partir de $N(\Phi)$ en y remplaçant $v_{k_0}$ par $\Delta v_{k_0}$. L'intégration sur $r_{12}$ est réservée pour la fin.

Les formules à appliquer dans les deux premières intégrations sont

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-1}^{1} f(\tau)\, e^{-a\tau} \, d\tau = -e^{-a\tau}\frac{1}{a-D}f(\tau)\Big|_{-1}^{1}, \\ \displaystyle\int_{1}^{\infty} f(\sigma)\, e^{-b\sigma} \, d\sigma = -e^{-b\sigma}\frac{1}{b-D}f(\sigma)\Big|_{1}^{\infty}. \end{array}\right\} \tag{34}$$

Elles sont écrites sous forme symbolique, $D$ étant le symbole de dérivation.

La dernière intégration est plus ardue. Elle nécessite le calcul d'intégrales de la forme

$$I_{n,a} = \int_0^\infty e^{-ar_{12}} v_{k0}(r_{12}) r_{12}^n \, dr_{12}, \qquad (35)$$

où $a$ et $n$ sont des entiers positifs. On cherche le développement à l'origine de la fonction régulière $v_{k0}(r_{12})$. Par une intégration terme à terme, on calcule les deux premières intégrales $I_{0,a}$ et $I_{1,a}$. Une transformation de Laplace appliquée à l'équation différentielle en $v_{k0}$ permet de trouver la relation de récurrence entre les intégrales $I_{n,a}$ qui sont ainsi toutes déterminées [1].

L'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-ar_{12}} (\Delta v_{k0}) \, r_{12}^n \, dr_{12}$$

se ramène à des intégrales $I_{n,a}$ moyennant deux intégrations par partie.

Finalement, l'énergie approchée $E'$ se mettra sous la forme

$$E' = E + \frac{A + \varepsilon B}{C + \varepsilon D}; \qquad (36)$$

$A$ et $C$ sont des intégrales directes, $B$ et $D$ des intégrales d'échange. Elles sont exprimées par des combinaisons linéaires d'intégrales $I_{n,a}$.

9. **Résultats numériques.** — Nous donnons les niveaux d'énergie obtenus avec les fonctions $\Phi$ par la méthode de Ritz. A titre indicatif, nous avons calculé les mêmes niveaux avec les fonctions d'écran $\Phi'$ et $\Phi''$ définies par

$$\Phi' = \psi_{nlm}(1, Z')\psi_{100}(2, Z') + \varepsilon\psi_{nlm}(2, Z')\psi_{100}(1, Z'),$$
$$\Phi'' = \psi_{nlm}(1, Z'')\psi_{100}(2, Z) + \varepsilon\psi_{nlm}(2, Z'')\psi_{100}(1, Z).$$

Nous avons corrigé le défaut d'orthogonalité des fonctions d'onde des états $1\,S$ et $2^1\,S$ (2); l'orthogonalité des autres fonctions est réalisée d'emblée. Les valeurs expérimentales ont été mises à jour [4]. L'unité d'énergie adoptée est l'unité atomique (3).

| | | Valeurs calculées. | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| États. | Valeurs expérimentales. | $\Phi$. | $k^2$. | $\Phi'$. | $Z'$. | $\Phi''$. | $Z''$. |
| $1\,S$.......... | — 2,903.67 | — 2,878.08 | 0,16 | — 2,847.66 | 1,69 | — 2,864.16 | 1,31 |
| $2^3\,S$......... | — 2,175.24 | — 2,149,49 | 0,18 | — 2,138.27 | 1,85 | — 2,166.12 | 1,51 |
| $2^1\,S$.......... | — 2,145.98 | — 2,096.94 | - | — 2,057.85 | 1.82 | — 2,143.78 | - |
| | | (— 2,141.81) | (0,14) | | | (— 2,169,34) | (0,98) |
| $2^3\,P$......... | — 2,133.17 | — 2,094.96 | 0 | — 2,068.93 | 1,82 | — 2,130.79 | 1,10 |
| $2^1\,P$......... | — 2,123.84 | — 2,071.66 | 0,08 | — 2,007.28 | 1,79 | — 2,122.39 | 0,96 |

Nous donnons encore les distances singulet-triplet corrigées du défaut d'orthogonalité et en millièmes d'unité atomique.

| | | Valeurs calculées. | | |
|---|---|---|---|---|
| États. | Valeurs expérimentales. | $\Phi$. | $\Phi'$. | $\Phi''$. |
| $2^3\,S - 2^1\,S$.... | 29.26 | 52,55 | 80,42 | 22,34 |
| $2^3\,P - 2^1\,P$.... | 9.33 | 23,30 | 61,65 | 8,40 |

La fonction $\psi_2$ utilisée est $u_{k0}(r_{12})$; à part l'état $2^3\,P$ où nous avons préféré prendre $\frac{u_{k1}(r_{12})}{(r_{12})}$ (1). Dans le cas de l'état fondamental, on remarque que la fonction $\Phi$ donne la meilleure détermination du niveau. La méthode utilisée donne d'ailleurs toujours de meilleurs résultats que la fonction d'écran $\Phi'$ obtenue en faisant seulement varier le paramètre $Z$ de la fonction d'onde du problème sans interaction. Par contre, la fonction $\Phi''$ rendant compte de l'effet d'écran dû à l'électron $1\,S$ donne de plus justes valeurs pour tous les niveaux excités. Il est cependant à souligner que les fonctions $\Phi$ permettent de calculer la distance $1\,S - 2^3 S$ avec une précision remarquable. En ce qui concerne la moyenne $(\overline{\mu^2 r^{-3}})_{2P}$ utilisée par Araki dans son travail sur la structure fine de l'hélium [5], voici les valeurs calculées à partir des différentes fonctions :

- 0,122 cm$^{-1}$, fonction $\Phi''$ pour $Z'' = 1$;
- 0,164 cm$^{-1}$, intégration numérique de Sugiura [6];
- 0,373 cm$^{-1}$, fonction $\Phi$ avec $\psi_2 = u_{k0}$ pour $k^2 = 0,1$;
- 0,575 cm$^{-1}$, fonction $\Phi$ avec $\psi_2 = \frac{u_{k1}}{r_{12}}$ pour $k^2 = 0,1$;
- 0,976 cm$^{-1}$, fonction $\Phi'$ pour $Z' = 2$.

Il n'est donc probablement pas possible d'utiliser la fonction $\Phi$ pour une meilleure détermination de la structure fine.

10. **Conclusion.** — En astreignant les fonctions d'essai à satisfaire à l'équation rigoureuse (6) au deuxième ordre près dans le voisinage de $r_{12} = 0$, le calcul des niveaux d'énergie fournit des résultats bien meilleurs qu'avec les fonctions simples d'écran $\Phi'$.

Il serait instructif de considérer des familles de fonctions d'essai telles que $\Phi' \, u_{k0}(r_{12})$ et $\Phi'' \, u_{k0}(r_{12})$.

(1) Elle donne une meilleure détermination de l'énergie, mais non de l'écart $2^3 P - 2^1 P$.

(2) Les valeurs non corrigées figurent entre parenthèses.

(3) Une unité atomique = deux unités Rydberg.

Dans le cas des états $2S$, nous avons procédé à une détermination de l'énergie avec des fonctions peu différentes de $\Phi' \, u_{k0} \, (r_{12})$, mais elles n'ont pas permis d'améliorer les résultats déjà trouvés.

Quoi qu'il en soit, on constate que la méthode exploitée fournit une meilleure détermination du niveau fondamental que les fonctions à un paramètre utilisées jusqu'ici. Dans le cas des états excités, la situation est moins satisfaisante. La fonction d'interaction introduite tient vraisemblablement trop compte de l'interaction électrostatique.

Manuscrit reçu le 31 janvier 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] PLUVINAGE P. — *Ann. Physique*, 1950, **5**, 145; *J. Physique Rad.*, 1951, **12**, 789.
[2] BREIT G. — *Phys. Rev.*, 1930, **35**, 569.
[3] HYLLERAAS E. — *Z. Physik*, 1928, **48**, 469.
[4] MOORE CH. — Atomic Energy Levels. *Nat. Bur. of Standards*, Circ. n° 467, Washington, 1952.
[5] ARAKI G. — *Proc. Phys. Math. Soc.*, Japan, 1937, **19**, 12.
[6] SUGIURA Y. — *Z. Physik*, 1927, **44**, 190.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 16, JUIN 1955, PAGE 479.

# DOSAGE DU RADON DANS LES MINES D'URANIUM PAR LA MÉTHODE DE PRÉLÈVEMENT SUR CHARBON

Par Mlle CADUDAL.

**Sommaire.** — On décrit une méthode de dosage du radon atmosphérique. Cette méthode utilise l'adsorption du radon sur le charbon actif. On compte ensuite à l'aide d'un compteur de Geiger les rayons β émis par le RaC au sein du charbon actif. Les volumes d'air prélevés varient entre 10 et 200 l. La sensibilité limite est de $10^{-12}$ curie/l. La précision est de l'ordre de 7 pour 100. Cette méthode est destinée au contrôle des concentrations de radon dans l'atmosphère des mines ou des locaux contenant de l'uranium. Le prélèvement se fait en 5 mn, l'ensemble de l'appareil portatif pèse environ 2 kg et possède une autonomie d'environ 15 h.

**Introduction.** — La dose de tolérance admise est de $10^{-11}$ curie de radon par litre d'air respiré, soit $10^{-8}$ curie/m³. Dans l'air normal la quantité de radon est seulement de l'ordre de $10^{-10}$ curie/m³ [1], mais dans les mines d'uranium la dose de tolérance risque en général d'être largement dépassée. Il importe de surveiller très fréquemment la radioactivité de l'air des galeries et de la mine en général, pour éviter les concentrations excessives de radon.

Divers procédés sont employés pour doser le radon dans l'air. Ce sont des procédés exigeant un matériel fragile et délicat; les mesures sont difficilement faites sur les mines. Les échantillons d'air prélevés doivent être expédiés au laboratoire pour le dosage. Ces procédés consistent en :

1° Un comptage individuel des particules α émises par le gaz introduit à l'intérieur d'un compteur fonctionnant en régime proportionnel [2] ou à l'intérieur d'une chambre d'ionisation à impulsions [3]. La manipulation est délicate et l'appareillage électronique nécessaire est important.

2° Une mesure du courant d'ionisation produit par le gaz à étudier, dans une chambre d'ionisation. Cette méthode est celle utilisée au C. E. A. [4]. Les prélèvements d'un litre d'air sont faits dans des ampoules de verre vidées. Il faut ensuite au laboratoire faire passer cet air dans la chambre d'ionisation à travers des tubes de desséchants. L'appareillage électronique est assez délicat; la méthode est précise et l'on peut mesurer $10^{-12}$ curie/l.

Une méthode plus simple que nous allons détailler ci-dessous consiste à faire passer sur du charbon actif une quantité donnée d'air [5]. Le charbon actif adsorbe quantitativement le radon [6]. Dans le dispositif que nous proposons, le charbon pollué par le radon est disposé autour de compteurs à rayons β et l'on compte les rayons β émis par le Ra*C*, un des produits de désintégration du radon. Cette méthode nécessite encore, cependant, une mesure de laboratoire; mais la mesure est simple et se fait avec des appareils très répandus dans les laboratoires des mines d'uranium.

**Dosage par adsorption sur le charbon actif.** — Principe de la méthode. — Lorsque l'on fait passer un mélange d'air et de radon à teneur constante à travers une colonne de charbon actif avec un débit constant, la quantité de radon adsorbée par unité de longueur de la colonne décroît suivant une loi exponentielle le long de la colonne de charbon. La quantité de radon adsorbée en un seul passage pour une vitesse donnée de l'air est donc fonction de la longueur de la colonne adsorbante. Par exemple, dans les cartouches de charbon utilisées (200 cm$^3$, 8,5 cm de long), on adsorbe sur les 3,5 premiers centimètres de charbon la moitié du radon adsorbé dans tout le charbon, lorsque la vitesse de passage de l'air est de 14 cm/s.

Pour des dosages très précis, on établit un circuit continu et l'air passe sur le charbon autant de fois qu'il est nécessaire pour que tout le radon soit adsorbé [6]. Cette méthode de passages successifs n'est pas utilisable dans les mines.

L'adsorption du radon est fonction de la durée de contact entre gaz et adsorbant. Par exemple, pour une même colonne de 8,5 cm de long, contenant 50 cm$^3$ de charbon actif, l'adsorption qui était pratiquement de 100 pour 100 pour un débit de 0,1 l/mn (soit une vitesse moyenne à travers la cartouche de 16 cm/mn) n'est plus que de 56 pour 100 pour un débit de 10 l/mn.

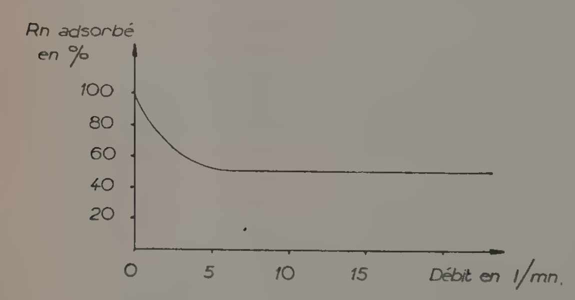



Fig. 1. — Adsorption du radon en fonction du débit d'air.

Pour les cartouches de 200 cm$^3$ (1) utilisées dans les mines, on a déterminé le pourcentage d'adsorption en fonction du débit (*fig.* 1).

On remarque que la fraction adsorbée devient pratiquement constante lorsque le débit devient supérieur à 5 l/mn. Il y a donc intérêt, lorsque l'on veut augmenter la sensibilité de la mesure sans accroître la durée du prélèvement, à avoir un débit aussi grand que possible.

La courbe de la figure 1 n'est valable que tant que la pression partielle de radon dans l'air reste inférieure à une certaine valeur. Au-delà de cette valeur il y a saturation et les fractions retenues sont plus faibles. Pour le charbon utilisé et pour les prélèvements de 100 l effectués, la saturation par le radon ne commence à devenir sensible que pour des pressions partielles supérieures à $10^{-14}$ atm, correspondant à des concentrations de $10^{-8}$ curie/l, soit 1000 fois la dose de tolérance.

Mesures. — Le radon adsorbé sur le charbon forme dans celui-ci son dépôt actif. Sur la figure 2 est indiquée l'allure de la variation du rayonnement β dur émis par ce dernier, après un prélèvement de courte durée. Le radon est en équilibre à 1 pour 100 près avec son dépôt actif à vie courte au bout de 3 h (ensuite l'activité décroît exponentiellement d'environ 1,5 pour 100 par 2 h).

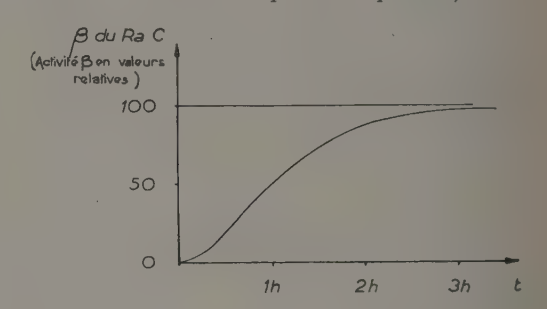



Fig. 2. — Formation du dépôt actif du radon dans le charbon.

Passé ce temps, on dispose le charbon autour d'un ou plusieurs compteurs suivant le volume de l'adsorbant. Ces compteurs cylindriques à paroi d'aluminium de 27,5 mg/cm$^2$ fonctionnent en régime Geiger et les impulsions sont transmises à travers un préamplificateur standard à un intégrateur échelle. On compte par ce moyen les rayons β de 3,15 MeV du Ra*C*. Le rendement de comptage, qui est le rapport entre le nombre d'impulsions comptées par les compteurs et le nombre de rayons β du Ra*C* émis par le charbon, dépend de la géométrie du système.

Dans le dispositif indiqué sur la figure 3 et qui comporte trois compteurs, le rendement est de 10 pour 100 environ. Il en résulte que, pour un débit supérieur à 5 l/mn, le taux de comptage est de 1,1 par minute et par litre d'air passé à travers le volume de la cartouche de charbon, lorsque cet air contient $10^{-11}$ curie/l (soit une dose de tolérance). En l'absence de charbon, le mouvement propre du dispositif protégé par une épaisseur de 5 cm de plomb est de 90 impulsions/mn environ.

Sensibilité et précision. — Théoriquement pour augmenter la sensibilité il suffit de prélever des quantités d'air plus importantes. Pratiquement, pour des prélèvements de 100 l, on peut estimer le dixième de la dose de tolérance, c'est-à-dire

(1) Les cartouches utilisées sont des cylindres de 8,5 cm de long et 23 cm$^2$ de section. Elles sont remplies de charbon actif Prolabo (voir *fig.* 4).

$10^{-12}$ curie/l. Pour un comptage de 5 mn, on obtient alors, en effet, un total de 500 impulsions environ, dont 450 sont dues au bruit de fond et 50 au radon. En dehors de l'erreur due au comptage, d'autres erreurs proviennent du fait que dans la pratique le volume d'air, le tassement de la colonne de charbon, etc. ne sont pas rigoureusement définis.

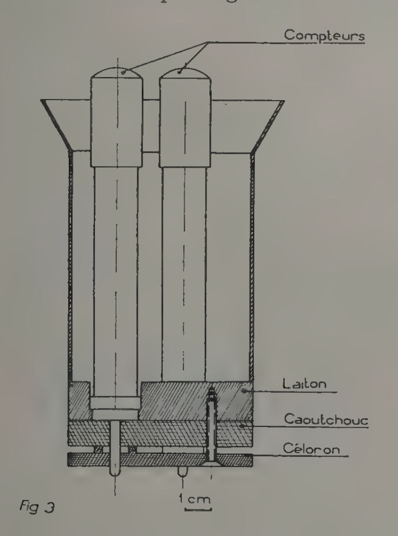



Fig. 3. — Disposition des compteurs.

L'ensemble de toutes ces erreurs ne produit pas cependant une dispersion importante : sur cinq mesures faites avec une concentration de $10^{-11}$ curie/l (définie à 1 pour 100 près environ), les valeurs trouvées différaient au maximum de 7 pour 100 en plus ou en moins de la valeur moyenne.

Exemple de dispersion de résultats dans les mines. — Des mesures ont été faites dans les mines à la fois avec les chambres d'ionisation et les cartouches de charbon actif. Les concentrations ont varié de $10^{-12}$ curie/l (0,1 dose de tolérance) à $10^{-7}$ curie/l (10 000 doses de tolérance). Sur un total de 40 mesures comparatives,

70 pour 100 des résultats différaient de moins de 10 pour 100;

30 pour 100 des résultats différaient de 10 à 50 pour 100

des résultats obtenus dans les mêmes conditions par la méthode de la chambre d'ionisation.

Ces divergences s'expliquent par le fait que les prélèvements n'ont pas tous été faits exactement à la même hauteur au-dessus du sol pour les deux mesures. Or dans les galeries, où la concentration était importante, on s'est aperçu que cette concentration diminuait très vite au fur et à mesure que l'on s'éloignait du sol. D'autre part, un prélèvement de 100 l, qui dure environ 5 mn, intègre les variations de concentration qui peuvent avoir lieu pendant ce temps à l'endroit du prélèvement, tandis que le prélèvement à la chambre d'ionisation (un litre rempli en quelques secondes) donne une valeur beaucoup plus particulière de la concentration et qui peut différer notablement de la valeur précédente.

Pour les concentrations importantes ($10^{-8}$ curie/l et au-dessus), on a intérêt à faire des prélèvements très peu importants (quelques litres) pour éviter la saturation du charbon.

Prélèvements. — C'est, compte tenu des dimensions des compteurs et de la géométrie optimum, que les cartouches de charbon utilisées ont un volume de 200 cm³. Le débit d'air a été fixé à 20 l/mn.

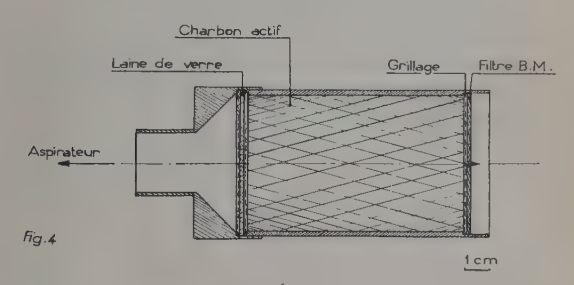



Fig. 4. — Cartouche de prélèvement.

L'air à doser est aspiré à travers la cartouche à l'aide d'un aspirateur ménager [2] bobiné spécialement pour fournir sa puissance de 150 W quand il est alimenté sous 40 V en courant alternatif. Alimenté sous 9 V de tension continue il débite 20 l/mn, compte tenu de l'ensemble des pertes de charge. Une batterie de six accus alcalins légers à l'argent-zinc [3] de 5 A/h (poids total, 720 g; volume, 500 cm³) suffit à le faire fonctionner pendant 15 h. La cartouche est munie à l'entrée d'un filtre en feutre de coton B. M. 2130 destiné à arrêter les poussières radioactives qui troubleraient les mesures. Un filtre de laine de verre placé à l'autre extrémité de la cartouche retient les poussières de charbon entraînées par le courant d'air (*fig.* 4). Un chronorupteur placé dans le circuit du moteur permet de prélever des volumes d'air variant de 10 à 100 l.

**Annexe.** — 1° Étalonnage. — Dans une enceinte étanche de 2 m³ on envoie une quantité de radon préalablement mesurée à la chambre d'ionisation (précision 1 pour 100). L'homogénéité permanente est obtenue à l'aide d'un ventilateur et le débit d'air est mesuré à l'aide d'un compteur à gaz (précision 1 pour 100).

2° Récupération du charbon actif. — Le

[2] Siemens type « Rapid » (le modèle normal consomme 150 W sous 120 V).

[3] Accus Andyar, Paris.

charbon actif peut être réutilisé. On élimine le radon et l'eau adsorbés en chauffant le charbon sous vide à 450° pendant 10 mn.

3° COMPARAISON DE LA MÉTHODE D'ADSORPTION SUR CHARBON ET DE LA MÉTHODE DE LA CHAMBRE D'IONISATION. — *a. Avantages de la méthode utilisant le charbon actif :*

— *Simplification du matériel :*

Méthode ancienne : Ampoules de verre; Pompe à vide; Tubes de desséchant; Chambre d'ionisation; Azote liquide.

Nouvelle méthode : Cartouches de charbon; Aspirateur et accus; Compteurs.

— *Appareils de mesures moins délicats :*

Méthode ancienne : Chambre d'ionisation; Préamplificateur à lampe électromètre; Amplificateur à courant continu pour courants à partir de quelques $10^{-16}$ A.

Nouvelle méthode : Compteurs; préamplificateurs; Intégrateur-échelle.

— *Mesure plus rapide :* Une mesure à la chambre d'ionisation pour une concentration de $10^{12}$ curie/l demande, en plus des opérations de transfert et dessiccation, environ 15 mn pour une précision de 45 pour 100 [4]. Cette durée peut être réduite à 5 mn avec un amplificateur à condensateur vibrant.

— *Quantité d'air prélevée plus importante :* On a ainsi une valeur moyenne meilleure de la concentration.

— *Le matériel de prélèvement est moins fragile,* et moins encombrant dès que l'on doit faire plus de quelques prélèvements avant de rentrer au laboratoire.

*b. Inconvénients.* — Les prélèvements sur cartouche, lorsque les concentrations sont faibles, durent de 5 à 10 mn. Avec les ampoules de verre ils sont instantanés.

Manuscrit reçu le 5 janvier 1955.

BIBLIOGRAPHIE.


[1] MEYER ST. et SCHWEIDLER E. — Radioactivität, Teubner, Leipzig, 1927. (Revue générale des différents travaux jusqu'à cette date.)
CARMICHAEL et TUNNICLIFFE (Canada). — *The J. Inst. Hyg. Toxicol.*, 1948, **30**, 4, 211-227.
BURKE T. et NOLAN J. J. (Irlande). — Radium *A* content of the Atmosph. *Proc. Roy. Irish Acad.*, 1950, p. 145-161.

[2] BROWN S. C., ELLIOT L. G. et EVANS R. D. — *Rev. Sc. Instr.*, 1942, **13**, 147-151.

[3] CURTISS L. F. et DAVIS J. F. — *Bur. Stand. J. Research*, 1943, **31**, n° 1.

[4] DELIBRIAS G. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 78 A.

[5] BUNZL L. — *Wien. Ber.*, 1906, p. 115-121.
RUTHERFORD E. — *Nature*, 1906, **74**, 634.

[6] GÜBELI G. et STAMMBACH K. — *Helv. Phys. Acta*, 1951, **34**, 1257-1263.


---

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 16, JUIN 1955, PAGE 482.

# CHOIX DE LA MÉTRIQUE ET DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE EN THÉORIE UNITAIRE D'EINSTEIN. LIEN AVEC LA THÉORIE DE BORN-INFELD

Par Stamatia MAVRIDÈS,
Institut Henri Poincaré, Paris.

**Sommaire.** — Nous montrons qu'il est possible de définir, en théorie unitaire d'Einstein, une métrique et un champ électromagnétique tels qu'un champ électrostatique reste fini à l'origine dans le cas d'une symétrie sphérique. La densité de charge intégrée dans tout l'espace reste finie et représente la charge de la particule.

Nous adopterons les équations suivantes de la théorie unitaire d'Einstein [1] (système faible) :

$$\left.\begin{array}{llll} g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^{s}_{il} - g_{is}\Gamma^{s}_{lk} = 0, & (1.1) & R_{ik} = 0, & (1.3) \\ \Gamma_i = \Gamma^{u}_{iu} - \Gamma^{u}_{ui} = 0, & (1.2) & R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},k} = 0, & (1.4) \end{array}\right\} \quad (1)$$

$R_{ik}$ étant le tenseur de Ricci.

Soient $\gamma_{ik}$ la partie symétrique de $g_{ik}$ et $\varphi_{ik}$ sa partie antisymétrique. On a

$$g_{ik} = \gamma_{ik} + \varphi_{ik}. \qquad (2)$$

Dans le cas d'une solution statique à symétrie sphérique des équations (1), le tenseur $g_{ik}$, exprimé à l'aide de coordonnées polaires, a la forme suivante [2] :

$$g_{ik} = \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 0 & w \\ 0 & -\beta & r^2 v \sin\theta & 0 \\ 0 & -r^2 v \sin\theta & -\beta \sin^2\theta & 0 \\ -w & 0 & 0 & \sigma \end{vmatrix}, \qquad (3)$$

où $\alpha$, $\beta$, $\sigma$, $v$ et $w$ sont des fonctions de la coordonnée radiale $r$ seulement.

En 1948, Papapetrou [2] a calculé cette solution dans le cas $v = 0$.

Avec cette hypothèse, il a montré qu'une solution statique à symétrie sphérique de (1) peut toujours se mettre sous la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} &\beta = r^2, \qquad \alpha = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}, \\ &\sigma = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(1 + \frac{k^2}{r^4}\right), \qquad w = \frac{k}{r^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$m$ et $k$ sont deux constantes d'intégration arbitraires, que l'on peut lier à la masse et à la charge (la vitesse de la lumière est prise égale à l'unité). Bien entendu, si $k = 0$, cette solution se réduit à la solution de Schwarzschild de la relativité générale.

Selon Papapetrou, quand $r \to \infty$, la solution (4) devrait tendre asymptotiquement vers la solution que détermine l'introduction du tenseur de Maxwell en relativité générale

$$\sigma = \frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}. \qquad (5)$$

En effet, on peut penser que cette solution (5) est toujours valable pour des champs faibles. Or, d'après (4), $\alpha$ ne contient pas de terme proportionnel à la charge et $\sigma$ ne contient pas de terme en $\frac{1}{r^2}$.

Papapetrou attribue cette difficulté au fait que $g_{\underset{\vee}{ik}} (= \varphi_{ik})$ n'est pas le champ lui-même, mais ce qu'il appelle le « potentiel du champ ».

En 1950, Wyman [3] a calculé la solution statique à symétrie sphérique des équations (1) dans le cas $w = 0$. Les conditions aux limites que Wyman appelle « conditions fortes » et qui sont valables pour un système de coordonnées polaires — c'est-à-dire $r^2 v \to 0$ quand $r \to \infty$ — conduisent à $v \equiv 0$. Le travail de Wyman montre que le système (1), avec ces conditions, et dans le cas $w = 0$, admet uniquement la solution statique à symétrie sphérique de Schwarzschild pour un champ purement gravifique.

Bonnor [4], en 1951, a repris le problème des solutions statiques à symétrie sphérique en théorie unitaire d'Einstein. Mais il utilise les équations de champ du système « fort » d'Einstein [5], c'est-à-dire le groupe d'équations obtenu en remplaçant (1.4) par l'équation

$$R_{\underset{\vee}{ik}} = 0.$$

Dans le cas $vw \neq 0$, et en imposant les conditions aux limites que Wyman appelle « conditions faibles » (et qui sont valables pour un système de coordonnées cartésiennes) — c'est-à-dire $v \to 0$ quand $r \to \infty$ — aucune des solutions obtenues par Bonnor ne correspond à un système physique existant naturellement car aucune ne contient de constante arbitraire correspondant à la masse de la distribution. Les solutions de Bonnor comportent en outre un nombre infini de surfaces de discontinuité pour les $g_{ik}$, qui sont soit nuls, soit infinis, sur ces surfaces. Qu'il y ait ($v \neq 0$) ou non ($v = 0$) un champ électrique, les résultats de Bonnor entraînent le fait que la matière ne peut être associée à un pôle magnétique. Mais, d'autre part, dans le cas purement électrique ($w = 0$, $v \neq 0$), les solutions de Bonnor comportent une infinité de surfaces de discontinuité pour la distribution de charge, et la charge totale est infinie.

La conclusion générale qui apparaît à la suite de ces divers travaux est donc qu'une solution statique à symétrie sphérique correspondant à l'hypothèse $vw \neq 0$ ne pourrait être trouvée qu'en affaiblissant le système d'équations examiné par Bonnor, soit en résolvant les équations du système faible (1) relatif à ce cas, soit en prenant au départ une autre forme des $g_{ik}$ que la forme (3) proposée par Papapetrou [2], soit encore en appliquant le principe d'action stationnaire à une densité formée avec un tenseur autre que le tenseur de Ricci.

Reprenant la solution (4) de Papapetrou, Wyman [3] avait fait remarquer que le choix de la métrique demeure, dans une large mesure, arbitraire. C'est, *a priori*, un tenseur du second rang $a_{ik}$, fonction des $g_{ik}$ et de leurs dérivées premières, et susceptible de se réduire, quand $\varphi_{ik} = 0$, aux valeurs que prévoit la relativité générale. Il faut une raison physique qui serve de guide dans le choix de la métrique et l'identification du champ électromagnétique. L'idée de lier $\gamma_{ik}$ ($= g_{ik}$ en notations d'Einstein) à la métrique est l'une des plus simples mais, comme le montre Wyman, ce choix est entièrement arbitraire. Il est beaucoup plus légitime, ainsi que le propose A. Lichnerowicz [6], de définir la métrique à l'aide des $h^{ik}\left(= g^{\underset{\vee}{ik}}\right.$ en notations d'Einstein$\left.\right)$, afin que les ondes de gravitation $\varphi$ soient des solutions de l'équation caractéristique

$$\Delta\varphi = g^{ik}\,\partial_i\varphi\,\partial_k\varphi = h^{ik}\,\partial_i\varphi\,\partial_k\varphi = 0.$$

Sans préjuger de l'une ou de l'autre de ces assimilations, nous allons essayer de définir une métrique et un champ électromagnétique qui nous permettent

de conserver en théorie unitaire certains résultats qu'avaient acquis, dans un domaine purement euclidien et purement électromagnétique, la théorie de Born et Infeld [7]. Celle-ci évite les difficultés d'énergie propre infinie en assimilant les particules à une distribution de charge étendue dans tout l'espace. Cette distribution est caractérisée par une densité $\rho$, fonction d'un champ fini à l'origine.

En 1943, Schrödinger [8] a développé une théorie purement affine dans laquelle il substituait aux relations (1.3) et (1.4) les définitions

$$R_{\underline{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{H}^{\mu\nu}}, \qquad \mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\underset{\vee}{\mu\nu}}}, \tag{6}$$

$\mathcal{H}^{\mu\nu}$ et $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ étant les densités correspondant aux $h^{\mu\nu}\left(= g^{\underline{\mu\nu}}\right)$ et $f^{\mu\nu}\left(= g^{\overset{\mu\nu}{\vee}}\right)$ [*cf.* (7)] et

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{G}^{\mu\nu}, R_{\underset{\vee}{\mu\nu}}\right) = \sqrt{-\operatorname{D\acute{e}t}\left(h_{\mu\nu} + R_{\underset{\vee}{\mu\nu}}\right)} - \sqrt{-\operatorname{D\acute{e}t} h_{\mu\nu}}.$$

Il a utilisé [9] dans ce cas une solution statique à symétrie sphérique en $\varphi_{14}$ qui vérifie (6).

B. Kursunoglu [10] a repris cette étude et l'a appliquée à divers problèmes. Il part, pour cela, d'une « nouvelle version de la théorie d'Einstein » dont les solutions à symétrie sphérique ne peuvent être calculées que d'une façon approchée pour des champs gravifiques et électromagnétiques faibles.

Ici, nous admettrons les équations (1) et nous supposerons que le champ électromagnétique est associé aux variables $f^{\mu\nu}$ et $\varphi_{\mu\nu}$ $\left(g^{\overset{\mu\nu}{\vee}}\right.$ et $g_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$ en notations d'Einstein$\left.\right)$ qui le déterminent à un invariant près. Par définition, ces variables sont liées par des relations non linéaires (*cf.* (10), Schrödinger [12] et M. A. Tonnelat [13], [14], p. 15) mais, bien entendu (nous développons une théorie sans terme cosmologique), ne sont pas les variables conjuguées par rapport à l'hamiltonien $\mathfrak{H} = \mathcal{G}^{ik} R_{ik}$ de la théorie. Quant à la métrique, nous supposerons qu'elle peut être liée *a priori* soit aux $\gamma_{\mu\nu}$, soit aux $h^{\mu\nu}$, et cela à un invariant près. Nous examinerons alors les conclusions qui interviennent dans le cas d'une solution statique à symétrie sphérique des équations (1) du champ.

**1. Choix de la métrique et du champ électromagnétique.** — Les champs et les inductions qui interviennent dans la théorie unitaire d'Einstein sont

$$\left.\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}, \\ g^{\mu\nu} &= h^{\mu\nu} + f^{\mu\nu}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$h^{\mu\nu}$ et $f^{\mu\nu}$ désignant respectivement les parties symétrique et antisymétrique de $g^{\mu\nu}$. Dans ce qui suit, utilisant les notations de M.-A. Tonnelat [11], [13], *nous désignerons toujours par la même lettre un élément et le mineur qui peut lui être associé.* Soient $\gamma$ et $\varphi$, $h$, $f$ et $g$ les déterminants formés par les éléments $\gamma_{\mu\nu}$, $\varphi_{\mu\nu}$, $h_{\mu\nu}$, $f_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$. Nous poserons

$$\left.\begin{aligned} &\gamma\gamma^{\mu\nu} = \text{mineur}\,\gamma_{\mu\nu}, && \varphi\varphi^{\mu\nu} = \text{mineur}\,\varphi_{\mu\nu}, \\ &hh^{\mu\nu} = \text{mineur}\,h_{\mu\nu}, && ff^{\mu\nu} = \text{mineur}\,f_{\mu\nu}, \\ &gg^{\mu\nu} = \text{mineur}\,g_{\mu\nu}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

de façon à avoir

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_{\mu\rho}\,\gamma^{\mu\sigma} = \delta^\sigma_\rho, && \varphi_{\mu\rho}\,\varphi^{\mu\sigma} = \delta^\sigma_\rho, \\ &h_{\mu\rho}\,h^{\mu\sigma} = \delta^\sigma_\rho, && f_{\mu\rho}\,f^{\mu\sigma} = \delta^\sigma_\rho, \\ &g_{\mu\rho}\,g^{\mu\sigma} = \delta^\sigma_\rho. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

*a.* Définition de la métrique et du champ électromagnétique au moyen des $g_{\mu\nu}$. — Les quantités $h^{\mu\nu}$ et $f^{\mu\nu}$ de la théorie d'Einstein se déduisent les unes des autres par les relations suivantes [12], [13] :

$$\left.\begin{aligned} f^{\mu\nu} &= \frac{\varphi}{g}\,\varphi^{\mu\nu} + \frac{\gamma}{g}\,\gamma^{\mu a}\,\gamma^{\nu b}\,\varphi_{ab}, \\ h^{\mu\nu} &= \frac{\gamma}{g}\,\gamma^{\mu\nu} + \frac{\varphi}{g}\,\varphi^{\mu a}\,\varphi^{\nu b}\,\gamma_{ab}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ces relations peuvent encore s'écrire

$$\sqrt{-g}\,f^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial \varphi_{\mu\nu}} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{-g}\,h^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial \gamma_{\mu\nu}} \quad (^1) \tag{11}$$

en posant

$$\mathcal{L}_a = 2\sqrt{-g} = 2\sqrt{-\gamma}\,L, \tag{12}$$

avec

$$L = \sqrt{\frac{g}{\gamma}} = \left(1 + \frac{1}{2}\gamma^{ab}\gamma^{cd}\varphi_{ac}\varphi_{bd} + \frac{\varphi}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \quad [8]. \tag{13}$$

Supposons que la métrique « vraie » soit $a_{\mu\nu}$ et que les champs et les inductions électromagnétiques soient $s_{\mu\nu}$ et $p^{\mu\nu}$. Nous appliquerons à ces quantités « physiques » (*mais à ces quantités seulement*) les règles habituelles qui président à l'élévation des indices, Nous poserons donc

$$\left.\begin{aligned} a_{\mu\rho}\,a^{\mu\sigma} &= \delta^\sigma_\rho, \\ s^{\underline{\mu\nu}} &= a^{\mu\rho}\,a^{\nu\sigma}\,s_{\rho\sigma}, \\ p_{\underline{\mu\nu}} &= a_{\mu\rho}\,a_{\nu\sigma}\,p^{\rho\sigma} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

en soulignant les indices qui sont élevés ou abaissés au moyen de la métrique « vraie » $a_{\mu\nu}$.

La métrique et les champs physiques peuvent être définis à partir des $g_{\mu\nu}$ de la manière suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} a_{\mu\nu} &= \mathcal{J}\,\gamma_{\mu\nu}, \\ s_{\mu\nu} &= \mathcal{J}\,\varphi_{\mu\nu}. \end{aligned}} \tag{15}$$

c'est-à-dire

$$a_{\mu\nu} + s_{\mu\nu} = \mathcal{J}\,g_{\mu\nu},$$

$\mathcal{J}$ étant un invariant.

(1) Cette quantité $\mathcal{L}_a$ (de même plus loin $\mathcal{L}_b$) n'est pas l'hamiltonien de la théorie d'Einstein. Nous la désignons par $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}_a$ ou $\mathcal{L}_b$) par analogie avec les notations de Born-Infeld.

Nous aurons ainsi

$$\left.\begin{aligned} a &= \mathfrak{J}^4\gamma, \\ \sqrt{-a}\,a^{\mu\nu} &= \mathfrak{J}\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{\mu\nu}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$a$ étant le déterminant formé par les éléments $a_{\mu\nu}$.

Nous pouvons aussi définir les quantités duales

$$s^{*\mu\nu} = \frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{2\sqrt{-a}}\,s_{\rho\sigma} = \frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{2\mathfrak{J}\sqrt{-\gamma}}\,\varphi_{\rho\sigma} \tag{17}$$

$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ étant l'indicateur de Levi-Civitá habituel, antisymétrique par rapport à tous ses indices. Elles nous permettent d'écrire les invariants fondamentaux

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\,s_{\mu\nu}\,s^{\underline{\mu}\,\underline{\nu}} = \frac{1}{2}\,\varphi_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma}\gamma^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}, \\ G &= \frac{1}{4}\,s_{\mu\nu}\,s^{*\mu\nu} = \sqrt{-\frac{\varphi}{\gamma}}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

de sorte que

$$L = \sqrt{\frac{g}{\gamma}} = (1 + F - G^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

En formant l'expression $\dfrac{s^{\underline{\mu}\,\underline{\nu}} - G\,s^{*\mu\nu}}{(1+F-G^2)^{\frac{1}{2}}}$, on trouve alors

$$\begin{aligned} 2\,\frac{\partial L}{\partial s_{\mu\nu}} &= \frac{s^{\underline{\mu}\,\underline{\nu}} - G\,s^{*\mu\nu}}{(1+F-G^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\mathfrak{J}}\sqrt{\frac{\gamma}{g}}\left(\gamma^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}\varphi_{\rho\sigma} + \frac{\varphi}{\gamma}\,\varphi^{\mu\nu}\right) \\ &= \frac{1}{\mathfrak{J}}\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\,f^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{20}$$

Si nous posons

$$\boxed{p^{\mu\nu} = \frac{1}{\mathfrak{J}}\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\,f^{\mu\nu},} \tag{21}$$

nous aurons donc la relation

$$p^{\mu\nu} = \frac{s^{\underline{\mu}\,\underline{\nu}} - G\,s^{*\mu\nu}}{(1+F-G^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{22}$$

Elle est valable entre champs conjugués $p^{\mu\nu}$ et $s_{\mu\nu}$, quel que soit l'invariant $\mathfrak{J}$.

*b*. Définition de la métrique et du champ électromagnétique au moyen des $g^{\mu\nu}$. — Supposons maintenant que la métrique « vraie » et les champs soient liés aux quantités $g^{\mu\nu}$.

Au lieu d'utiliser les relations (10), nous partirons alors des expressions suivantes [11] :

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{\mu\nu} &= \frac{g}{f}\,f_{\mu\nu} + \frac{g}{h}\,h_{\mu a}h_{\nu b}f^{ab}, \\ \gamma_{\mu\nu} &= \frac{g}{h}\,h_{\mu\nu} + \frac{g}{f}\,f_{\mu a}f_{\nu b}\,h^{ab}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

telles que

$$\left.\begin{aligned} &\frac{-1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial \mathcal{L}_b}{\partial f^{\mu\nu}} = \frac{2}{L}\,\frac{\partial L}{\partial f^{\mu\nu}} = \varphi_{\mu\nu} \\ \text{et}\quad & \\ &\frac{-1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial \mathcal{L}_b}{\partial h^{\mu\nu}} = \frac{2}{L}\,\frac{\partial L}{\partial h^{\mu\nu}} = \gamma_{\mu\nu} \quad (^1) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

en posant

$$\mathcal{L}_b = 2\sqrt{-g} = \frac{2\sqrt{-h}}{L} \tag{25}$$

avec

$$L = \sqrt{\frac{h}{g}} = \left(1 + \frac{1}{2}\,h_{pq}h_{ab}f^{pa}f^{qb} + \frac{h}{f}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}. \tag{26}$$

Nous supposerons que la métrique $b^{\mu\nu}$ et les champs $t^{\mu\nu}$ sont liés aux $g^{\mu\nu}$ de la façon suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} b^{\mu\nu} &= \frac{1}{\mathfrak{J}}\,h^{\mu\nu}, \\ t^{\mu\nu} &= \frac{1}{\mathfrak{J}}\,f^{\mu\nu}. \end{aligned}} \tag{27}$$

de sorte que

$$b^{\mu\nu} + t^{\mu\nu} = \frac{1}{\mathfrak{J}}\,g^{\mu\nu},$$

$\mathfrak{J}$ étant un invariant. Avec les mêmes conventions que dans le cas *a*, nous aurons, par définition, les relations suivantes analogues à (14) :

$$\left.\begin{aligned} b_{\mu\rho}b^{\nu\rho} &= \delta^{\nu}_{\mu}, \\ t_{\underline{\mu}\,\underline{\nu}} &= b_{\mu\rho}b_{\nu\sigma}t^{\rho\sigma} = \mathfrak{J}\,h_{\mu\rho}h_{\nu\sigma}f^{\rho\sigma}, \\ q^{\underline{\mu}\,\underline{\nu}} &= b^{\mu\rho}b^{\nu\sigma}q_{\rho\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Si $b$ est le déterminant formé par les $b_{\mu\nu}$, on aura alors

$$\left.\begin{aligned} b &= \mathfrak{J}^4 h, \\ \sqrt{-b}\,b^{\mu\nu} &= \mathfrak{J}\sqrt{-h}\,h^{\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Nous définissons de même les quantités duales

$$t^{*}_{\mu\nu} = \frac{-\sqrt{-b}}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}t^{\rho\sigma} = \frac{-\mathfrak{J}\sqrt{-h}}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}f^{\rho\sigma} \tag{30}$$

et nous calculons les invariants

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\,t_{\underline{\mu}\,\underline{\nu}}t^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,h_{\mu\rho}h_{\nu\sigma}f^{\mu\nu}f^{\rho\sigma} \\ &\qquad\left(= \frac{1}{2}\,\gamma^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}\varphi_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma}\right), \\ G &= \frac{1}{4}\,t_{\underline{\mu}\,\underline{\nu}}t^{*\underline{\mu}\,\underline{\nu}} = -\sqrt{-\frac{h}{f}} \qquad \left(= \sqrt{-\frac{\varphi}{\gamma}}\right), \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

de sorte que

$$L = \sqrt{\frac{h}{g}} = (1 + F - G^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{32}$$

Formons l'expression $\dfrac{t^{\mu\nu} - G\,t^{*\underline{\mu}\,\underline{\nu}}}{(1+F-G^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$\begin{aligned} \frac{t^{\mu\nu} - G\,t^{*\underline{\mu}\,\underline{\nu}}}{(1+F-G^2)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{\mathfrak{J}}\sqrt{\frac{g}{h}}\left[f^{\mu\nu} + \frac{h}{f}\,h^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}f_{\rho\sigma}\right] \\ &= \frac{1}{\mathfrak{J}}\sqrt{\frac{h}{g}}\,h^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}\varphi_{\rho\sigma}. \end{aligned} \tag{33}$$

Si l'on pose

$$q^{\underline{\mu}\,\underline{\nu}} = \frac{1}{\mathcal{J}}\sqrt{\frac{h}{g}}\,h^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}\varphi_{\rho\sigma}, \tag{34}$$

on a

$$q_{\mu\nu} = b_{\mu\rho}b_{\nu\sigma}q^{\underline{\rho}\,\underline{\sigma}}, \tag{35}$$

d'où il résulte

$$\boxed{q_{\mu\nu} = \mathcal{J}\sqrt{\frac{h}{g}}\,\varphi_{\mu\nu}.} \tag{36}$$

Ainsi on a encore une relation analogue à (22)

$$q^{\underline{\mu}\,\underline{\nu}} = \frac{t^{\mu\nu} - G\,t^{*\underline{\mu}\,\underline{\nu}}}{(1 + F - G^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{37}$$

quel que soit l'invariant $\mathcal{J}$.

*c*. Choix de l'invariant. — Les correspondances (15), (21) et (27), (36) ne permettent pas, bien entendu, de déterminer l'invariant $\mathcal{J}$. Cette détermination peut résulter des équations en divergence de densités. Les équations de la théorie d'Einstein

$$\partial_\rho \mathcal{F}^{\mu\rho} = \partial_\rho\left(\sqrt{-g}\,f^{\mu\rho}\right) = 0 \tag{38}$$

s'écrivent, en effet,

— avec le choix $a_{\mu\nu}$ :

$$\partial_\rho\left(\mathcal{J}\sqrt{-\gamma}\,p^{\mu\rho}\right) = \partial_\rho\left(\frac{1}{\mathcal{J}}\sqrt{-a}\,p^{\mu\rho}\right) = 0; \tag{39}$$

— avec le choix $b^{\mu\nu}$ :

$$\partial_\rho\left(\mathcal{J}\sqrt{-g}\,t^{\mu\rho}\right) = \partial_\rho\left(\frac{1}{\mathcal{J}}\sqrt{\frac{g}{h}}\sqrt{-b}\,t^{\mu\rho}\right) = 0.$$

En définissant les densités

$$\mathfrak{P}^{\mu\rho} = \sqrt{-a}\,p^{\mu\rho} \quad \text{et} \quad \mathfrak{T}^{\mu\rho} = \sqrt{-b}\,t^{\mu\rho}, \tag{40}$$

on aura

$$\left.\begin{aligned} &\partial_\rho\mathfrak{P}^{\mu\rho} = 0 \quad \text{si} \quad \mathcal{J} = 1 \quad \text{dans le cas } a, \\ &\partial_\rho\mathfrak{T}^{\mu\rho} = 0 \quad \text{si} \quad \mathcal{J} = \sqrt{\frac{g}{h}} = \sqrt{\frac{\gamma}{g}} \quad \text{dans le cas } b. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

En définitive, la métrique et les champs seront définis de la manière suivante :

| *a*. | *b*. | |
|---|---|---|
| $a_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}$, | $b^{\mu\nu} = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\,h^{\mu\nu}$, | |
| $s_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu}$, | $t^{\mu\nu} = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\,f^{\mu\nu}$, | (42) |
| $p^{\mu\nu} = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\,f^{\mu\nu}$; | $q_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu}$. | |

Ainsi, dans les deux cas, les champs et les inductions électromagnétiques s'expriment de la même façon en fonction des $\varphi_{\mu\nu}$ et des $f^{\mu\nu}$. Dans les deux cas, la métrique $a_{\mu\nu}$ ou $b_{\mu\nu}$ est telle que

$$a = b = \gamma. \tag{43}$$

*d*. Application au cas de la solution statique a symétrie sphérique. — Supposons qu'une solution statique à symétrie sphérique comporte uniquement le champ antisymétrique $\varphi_{14}(\varphi_{23} = 0)$ de façon à pouvoir utiliser la solution (4) de Papapetrou, qui est, à l'heure actuelle, la seule solution effectivement utilisable. On aura donc

$$\left.\begin{aligned} &g = -(\alpha\sigma - \varpi^2)\beta^2\sin^2\theta = -r^4\sin^2\theta, \\ &\gamma = -\alpha\sigma\beta^2\sin^2\theta = -\left(1 + \frac{k^2}{r^4}\right)r^4\sin^2\theta, \\ &\varphi = 0 \ (^2). \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

On en déduit les valeurs des $g^{\mu\nu}$ d'après (10)

$$g^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} -\sigma & 0 & 0 & -\varpi \\ 0 & -\frac{1}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\beta\sin^2\theta} & 0 \\ \varpi & 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix}; \tag{45}$$

le tenseur métrique aura les valeurs suivantes :

*a*. Avec le choix $a_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}$

$$\left.\begin{aligned} &a_{11} = \frac{-1}{1 - \frac{2m}{r}}, \\ &a_{22} = \frac{a_{33}}{\sin^2\theta} = -r^2, \\ &a_{44} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(1 + \frac{k^2}{r^4}\right); \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

*b*. Avec le choix $b^{\mu\nu} = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\,h^{\mu\nu}\left(\text{ou } b_{\mu\nu} = \sqrt{\frac{\gamma}{g}}\,h_{\mu\nu}\right)$

$$\left.\begin{aligned} &b_{44} = -\frac{1}{b_{11}} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\sqrt{1 + \frac{k^2}{r^4}}, \\ &b_{22} = \frac{b_{33}}{\sin^2\theta} = -r^2\sqrt{1 + \frac{k^2}{r^4}} \end{aligned}\right\} \tag{46 bis}$$

Aussi, les composantes du champ et de l'induction

(2) Notons que le terme $\frac{\varphi}{g}\varphi^{\mu\rho}\varphi^{\nu\sigma}\gamma_{\rho\sigma}$ qui figure dans les relations (10) est encore égal à $\frac{1}{4g}\varepsilon^{\mu\rho ab}\varphi_{ab}\varepsilon^{\nu\sigma pq}\varphi_{pq}\gamma_{\rho\sigma}$, car

$$\varphi^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma},$$

Ainsi, il n'y a pas d'indétermination lorsque $\varphi \neq 0$.

électromagnétique seront dans les deux cas $a$ et $b$

$$\left.\begin{aligned} s_{14} &= q_{14} = \varphi_{14} = \frac{k}{r^2}, \\ p^{14} &= t^{14} = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\, f^{14} = -\frac{k}{r^2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k^2}{r^4}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

Ces expressions peuvent encore s'écrire de la façon suivante :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{b}\, s_{14} &= \frac{e}{r^2} = D, \\ -\mathrm{b}\, p^{14} &= \frac{e}{r^2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r_0^4}{r^4}}} = E \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

en posant $k\mathrm{b} = e$ et $k = r_0^2$.

Alors que l'induction $D$ devient infinie quand $r \to 0$, le champ $E$ reste fini à l'origine. Ces conclusions sont celles qui résultent de la théorie de Born, et la valeur du champ $E$ (défini ici par les composantes *contravariantes* $p^{\mu\nu}$) est celle de la théorie de Born.

## 2. Courant et charge en théorie unitaire d'Einstein.

### *a*. Choix de la métrique $a_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}$.

L'équation

$$\mathcal{F}^{\mu} = \partial_{\nu}(\sqrt{-g}\, f^{\mu\nu}) = 0 \qquad (38)$$

peut encore s'écrire

$$\partial_{\nu}(\sqrt{-a}\, p^{\mu\nu}) = 0.$$

Or, d'après (22) et (19),

$$\partial_{\nu}(\sqrt{-a}\, p^{\mu\nu}) = \partial_{\nu}\left\{\sqrt{-a}\left(2\frac{\partial L}{\partial F} s^{\underline{\mu}\,\underline{\nu}} + \frac{\partial L}{\partial G} s^{*\mu\nu}\right)\right\} = 0 \qquad (49)$$

Cette équation permet de définir un courant et une distribution spatiale de charge $j^{\mu}$ en posant

$$\boxed{4\pi j^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\partial_{\nu}(\sqrt{-a}\, s^{\underline{\mu}\,\underline{\nu}})} \qquad (50)$$

c'est-à-dire

$$4\pi j^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\partial_{\nu}[\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}\varphi_{\rho\sigma}],$$

avec

$$4\pi j^{\mu} = -\frac{1}{2\frac{\partial L}{\partial F}}\left\{2 s^{\underline{\mu}\,\underline{\nu}}\partial_{\nu}\left(\frac{\partial L}{\partial F}\right) + s^{*\mu\nu}\partial_{\nu}\left(\frac{\partial L}{\partial G}\right) + \frac{1}{\sqrt{-a}}\frac{\partial L}{\partial G}\partial_{\nu}(\sqrt{-a}\, s^{*\mu\nu})\right\}; \qquad (51)$$

le dernier terme

$$\partial_{\nu}(\sqrt{-a}\, s^{*\mu\nu}) = \frac{1}{6}\varepsilon^{\mu\rho\lambda\tau}\partial_{[\rho}s_{\lambda\tau]}$$

$$= \frac{1}{6}\varepsilon^{\mu\rho\lambda\tau}\partial_{[\rho}\varphi_{\lambda\tau]} = \frac{1}{6}\varepsilon^{\mu\rho\lambda\tau}(\partial_{\rho}\varphi_{\lambda\tau} + \partial_{\tau}\varphi_{\rho\lambda} + \partial_{\lambda}\varphi_{\tau\rho}) \qquad (52)$$

fait intervenir le pseudo-vecteur $\varphi_{\rho\lambda\tau} = \partial_{[\rho}\varphi_{\lambda\tau]}$ et ne disparaît pas avec les hypothèses habituelles de la théorie unitaire d'Einstein où $\varphi_{\mu\nu\rho} \neq 0$.

APPLICATION AU CAS DE LA SOLUTION STATIQUE A SYMÉTRIE SPHÉRIQUE. — Dans le cas particulier (4) de la solution statique à symétrie sphérique en $\varphi_{14}$, $\varphi_{\mu\nu\rho} = 0$. Dans ce cas, $j^{\mu}$ se réduit à $j^4$. On a

$$4\pi j^4 = \frac{1}{\sqrt{-a}}\partial_1(\sqrt{-a}\, s^{\underline{4}\,\underline{1}}) = \frac{1}{\sqrt{-a}}\partial_r(\sqrt{-a}\, s^{\underline{4}\,\underline{1}}). \qquad (53)$$

Or, d'après (14), (46) et (47)

$$\left.\begin{aligned} s^{\underline{4}\,\underline{1}} &= a^{44}a^{11}s_{41} = \frac{k}{r^2}\frac{1}{1+\frac{k^2}{r^4}}, \\ \sqrt{-a} &= \sqrt{-\gamma} = r^2\sqrt{1+\frac{k^2}{r^4}}\sin\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

d'où

$$4\pi j^4 = \frac{2k^3}{r^7\sqrt{1+\frac{k^2}{r^4}}\left(1+\frac{k^2}{r^4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{r\sqrt{1+\frac{k^2}{r^4}}\left(1+\frac{r^4}{k^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (55)$$

qui peut encore s'écrire

$$\mathrm{b}j^4 = \frac{e}{2\pi r_0^3\frac{r}{r_0}\left(1+\frac{r^4}{r_0^4}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k^2}{r^4}}}. \qquad (56)$$

Le calcul de l'intégrale d'espace conduit à

$$\int \rho\, \mathrm{d}v = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{b}j^4\sqrt{-a}\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e r^2\sin\theta}{2\pi r_0^3\left(\frac{r}{r_0}\right)\left(1+\frac{r^4}{r_0^4}\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2e}{r_0^3}\int_0^{\infty}\frac{r^2\,\mathrm{d}r}{\frac{r}{r_0}\left(1+\frac{r^4}{r_0^4}\right)^{\frac{3}{2}}} = e. \qquad (57)$$

Ainsi, la libre densité de charge $j^{\mu}$, exprimée en fonction des champs par la relation (50) conduit à une charge totale finie quand on l'intègre dans tout l'espace. Dans ce cas, avec le choix $a_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}$ de la métrique, ce sont bien les quantités $p^{14}$ et $s_{14}$, c'est-à-dire $\sqrt{\frac{g}{\gamma}}f^{14}$ et $\varphi_{14}$, qu'il faut lier au cas « électrique ».

### *b*. Choix de la métrique.

$$b^{\mu\nu} = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\, h^{\mu\nu} \qquad \text{ou} \qquad b_{\mu\nu} = \sqrt{\frac{g}{h}}\, h_{\mu\nu}.$$

L'équation (38)

$$\mathcal{F}^{\mu} = \partial_{\nu}(\sqrt{-g}\, f^{\mu\nu}) = 0$$

qui sert de point de départ pour la définition du courant dans le cas $a$ ne peut être utilisée ici. En effet, elle peut encore s'écrire

$$\partial_{\nu}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}_a(\varphi,\gamma)}{\partial\varphi_{\mu\nu}}\right\} = \partial_{\nu}\left\{2\sqrt{-\gamma}\frac{\partial L}{\partial\varphi_{\mu\nu}}\right\} = 0 \qquad (58)$$

en tenant compte de (11) et de (12). Or, (58) conduit

à la définition (50) d'un courant $\partial_\nu\left(\sqrt{-\gamma}\gamma^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}\varphi_{\rho\sigma}\right)$, quantité qui est la divergence d'un champ $\varphi^{\underline{\mu}\,\underline{\nu}}$ associé à une métrique $\gamma_{\mu\nu}$. Avec le choix *a* [*cf.* (42)], le champ $s_{\mu\nu}=\varphi_{\mu\nu}$ est effectivement associé à la métrique $a_{\mu\nu}=\gamma_{\mu\nu}$, ce qui permet la définition (50) du courant. Mais, avec le choix *b*, le champ $q_{\mu\nu}=\varphi_{\mu\nu}$ est associé à la métrique $b^{\mu\nu}=\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\,h^{\mu\nu}$, et les quantités $\gamma^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}\varphi_{\rho\sigma}$ ne représentent plus les composantes contravariantes d'un champ physique.

Pour définir un courant, il faut avec le choix *b*, utiliser comme point de départ le pseudo-vecteur

$$\varphi_{\mu\nu\rho}=\partial_\rho\varphi_{\mu\nu}+\partial_\mu\varphi_{\nu\rho}+\partial_\nu\varphi_{\rho\mu},$$

avec

$$\varphi_{\mu\nu}=q_{\mu\nu}=\frac{\partial L}{\partial t^{\mu\nu}}=2\frac{\partial L}{\partial F}t_{\underline{\mu}\,\underline{\nu}}+\frac{\partial L}{\partial G}t^{*}_{\mu\nu}. \qquad (59)$$

Il en résulte, en tenant compte de l'équation (41), que

$$\varphi_{\mu\nu\rho}=\left[2\frac{\partial L}{\partial F}\partial_{[\rho}t_{\underline{\mu}\,\underline{\nu}]}+2t_{[\underline{\mu}\,\underline{\nu}}\partial_{\rho]}\left(\frac{\partial L}{\partial F}\right)+t^{*}_{[\mu\nu}\partial_{\rho]}\left(\frac{\partial L}{\partial G}\right)\right] \qquad (60)$$

en désignant par $\partial_{[\rho}t_{\mu\nu]}$ la permutation circulaire $\partial_\rho t_{\underline{\mu}\,\underline{\nu}}+\partial_\mu t_{\underline{\nu}\,\underline{\rho}}+\partial_\nu t_{\underline{\rho}\,\underline{\mu}}$ et, de même,

$$t_{[\underline{\mu}\,\underline{\nu}}\partial_{\rho]}=t_{\underline{\mu}\,\underline{\nu}}\partial_\rho+t_{\underline{\nu}\,\underline{\rho}}\partial_\mu+t_{\underline{\rho}\,\underline{\mu}}\partial_\nu.$$

Il est possible ici de définir un courant et une libre densité de charge $i^\mu$ de la façon suivante :

$$4\pi i^\mu=-\frac{1}{\sqrt{-b}}\partial_\nu\left(\sqrt{-b}\,t^{*\underline{\mu}\,\underline{\nu}}\right)=-\frac{1}{6\sqrt{-b}}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(\partial_\nu t_{\underline{\rho}\,\underline{\sigma}}+\partial_\rho t_{\underline{\sigma}\,\underline{\nu}}+\partial_\sigma t_{\underline{\nu}\,\underline{\rho}}\right), \qquad (61)$$

avec

$$4\pi i^\mu=-\frac{1}{2\frac{\partial L}{\partial F}}\left[2t^{*\underline{\mu}\,\underline{\nu}}\partial_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial F}\right)+t^{\mu\nu}\partial_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial G}\right)+\partial_\nu\left(\sqrt{-b}\,q^{*\mu\rho}\right)\right]. \qquad (62)$$

Dans le cas *a*, le courant est la divergence du champ $s^{\underline{\mu}\,\underline{\nu}}$ (50). Dans le cas *b*, c'est la divergence du champ $t^{*\underline{\mu}\,\underline{\nu}}$ qui sert à définir le courant (61).

APPLICATION AU CAS DE LA SOLUTION STATIQUE A SYMÉTRIE SPHÉRIQUE. — La densité de charge sera donc ici

$$4\pi\sqrt{-b}\,i^4=\partial_1\left(\sqrt{-b}\,t^{*\underline{1}\,\underline{4}}\right). \qquad (63)$$

Mais $t^{*\underline{1}\,\underline{4}}$ est lié à la composante $t_{\underline{2}\,\underline{3}}$ et

$$t_{\underline{2}\,\underline{3}}=b_{22}b_{33}t^{23}=\sqrt{\frac{\gamma}{g}}\,h_{22}h_{33}f^{23}. \qquad (64)$$

Donc, pour pouvoir définir une densité de charge dans le cas statique à symétrie sphérique, avec le choix *b* de la métrique et du champ électromagnétique, il faudrait lier le champ électrique aux composantes $f^{23}$ et $\varphi_{23}$ (et non aux composantes $f^{14}$ et $\varphi_{14}$ comme dans le choix *a*). Or la solution statique à symétrie sphérique des équations (1) calculée dans ce cas par Wyman [3], n'a pas un sens physique acceptable si l'on impose les conditions aux limites dites « conditions fortes ». Peut-être est-il possible de lever cette difficulté en considérant le cas $\varphi_{23}\times\varphi_{14}\neq 0$ pour une solution à symétrie sphérique. C'est ce qu'a réalisé Bonnor [4], mais en utilisant, au lieu des équations (1) du champ, le système « fort » d'Einstein.

En définitive, dans le cas particulier de la solution statique à symétrie sphérique, si on lie le champ électrique aux composantes $\varphi_{14}$ et $f^{14}$, et si l'on définit la métrique par le tenseur $a_{\mu\nu}=\gamma_{\mu\nu}$, il est possible d'avoir un champ qui reste fini à l'origine et d'assimiler les sources à une distribution libre et continue de charge dont l'intégrale d'espace est finie et dont la densité est fonction d'un champ fini, en tout point de l'espace.

Au contraire, si l'on définit la métrique par le tenseur

$$b^{\mu\nu}=\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\,h^{\mu\nu},$$

on doit lier le champ électrique aux composantes $\varphi_{23}$ et $f^{23}$ et déterminer une solution à symétrie sphérique ayant un sens physique acceptable ([3]).

([3]) Suggérons, par exemple, une solution *non* statique des équations (1) ou bien l'utilisation d'une autre forme de $g_{ik}$ à symétrie sphérique (*cf.* VAIDYA, *Phys. Rev.*, 1953, **90**, 695) ou enfin la résolution des équations (1) du système « faible », dans le cas $\varphi_{23}\times\varphi_{14}\neq 0$.

Manuscrit reçu le 30 novembre 1954.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] EINSTEIN A. et STRAUS E. G. — *Ann. Math. Princeton*, 1946, **47**, 731.
[2] PAPAPETROU A. — *Proc. Roy. Irish Acad.*, 1948, **52**, 69.
[3] WYMAN M. — *Canad. J. Math.*, 1950, **2**, 427.
[4] BONNOR W. B. — *Proc. Roy. Soc.*, 1951, **209**, 353; 1951, **210**, 427.
[5] EINSTEIN A. — The meaning of relativity, 1951.
[6] LICHNEROWICZ A. — Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, p. 288.
[7] BORN M. et INFELD L. — *Proc. Roy. Soc.*, 1934, A **144**, 425.
[8] SCHRÖDINGER E. — *Proc. Roy. Irish Acad.*, 1943, **49** A, 43.
[9] SCHRÖDINGER E. — *Proc. Roy. Irish Acad.*, 1944, **49** A, 225.
[10] KURSUNOGLU B. — *Phys. Rev.*, 1952, **88**, 1369.
[11] TONNELAT M.-A. — *J. Physique Rad.*, 1951, **12**, 81.
[12] SCHRÖDINGER E. — *Proc. Roy. Irish. Acad.*, 1948, **51** A, 205.
[13] TONNELAT M.-A. — *J. Physique Rad.*, 1955, **16**, 21.
[14] TONNELAT M.-A — La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements (Gauthier-Villars, 1955).

# LETTRES A LA RÉDACTION

## DIFFÉRENTES RÉALISATIONS PRATIQUES D'ÉTINCELLES GLISSANTES POUR LA SPECTROGRAPHIE DANS L'ULTRAVIOLET LOINTAIN

Par M. Jacques ROMAND
et Mlle Germaine BALLOFFET,
Laboratoire des Hautes Pressions, Bellevue.

L'étincelle condensée dans le vide, qui permet d'obtenir dans l'ultraviolet lointain les spectres d'émission d'atomes fortement ionisés, est d'une utilisation peu pratique par suite du faible écartement des électrodes nécessité par la valeur élevée des champs disruptifs dans le vide. Cet inconvénient est évité dans l'étincelle glissante [1], [2], l'intervalle disruptif long et les tensions d'amorçage peu élevées assurant une meilleure stabilité de fonctionnement et permettant même l'utilisation de cette étincelle pour la spectrophotométrie [3].

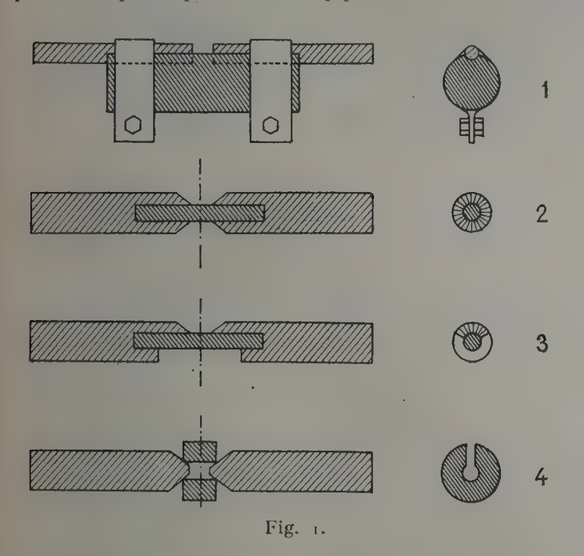



Fig. 1.

Ayant en vue l'application de ce type de source à l'analyse spectrale dans l'ultraviolet lointain nous avons cherché à utiliser un support plus avantageux que le carbone aggloméré qui présente en effet divers inconvénients : usure, dégazage, raies intenses du carbone dans le spectre. Nous avons éliminé le verre (pyrex), car le spectre obtenu contient des raies intenses du matériau du support (silicium, bore, oxygène). Par contre nous avons adopté l'alumine, le spectre étant presque exclusivement celui des électrodes avec seulement quelques raies de l'oxygène et de l'aluminium. Le montage des électrodes est le suivant :

La disposition 1 comporte un bâtonnet d'alumine (diamètre : 9 mm), les électrodes cylindriques (diamètre : 3 mm) étant maintenues au moyen de colliers dans une gorge longitudinale leur assurant une position définie ainsi qu'un bon contact avec le support.

Dans la disposition 2 les électrodes (diamètre : 6 mm) sont taillées en cône et percées d'un trou axial dans lequel le bâtonnet d'alumine (diamètre : 2 à 3 mm) est enfilé à frottement doux. Dans ces conditions l'étincelle éclate bien mais tourne autour de l'alumine. Cet inconvénient est évité en partie dans la disposition 3 où on a supprimé une portion de 180° ou plus des électrodes, l'étincelle restant alors toujours devant la fente mais se déplaçant un peu latéralement.

La disposition 4 permet une taille et une substitution rapide des électrodes. La pièce d'alumine a la forme d'un cylindre creux de 9 mm de diamètre extérieur, 3 mm de diamètre intérieur, 3 à 5 mm de longueur avec une fente latérale de 2 mm de largeur permettant le passage de la lumière (1).

Toutes ces étincelles ont été utilisées suivant une technique (spectrographe, alimentation électrique) déjà décrite [4]. Les dispositions 1 et 4 sont les plus favorables. Avec des électrodes de fer il faut environ 20 étincelles (40 s de pose) pour la région 2000-1100 Å et 40 étincelles pour la région 1100-700 Å, avec un réseau en incidence normale.

L'étincelle n'éclate régulièrement entre les électrodes que si l'alumine et les électrodes ont été préalablement nettoyées par chauffage afin de détruire toutes les couches superficielles de matières organiques qui se transforment vraisemblablement en carbone pendant les premières étincelles et forment à la surface du support des chemins plus ou moins conducteurs autorisant le passage de l'étincelle glissante entre les colliers disposition 1 ou à la surface extérieure de l'alumine disposition 4; on observe dans ce cas des raies intenses du carbone. Enfin l'écartement des électrodes ayant une influence notable sur l'intensité du spectre, particulièrement pour les courtes longueurs d'onde, il faut le régler à 0,2 mm près pour une valeur de l'écart de l'ordre de 3 mm, qui est celle que nous utilisons.

Sous cette forme l'étincelle dans le vide est d'emploi suffisamment pratique pour que l'on puisse étendre

(1) Ce dispositif est dérivé d'un montage analogue utilisé par M. K. Bockasten au Laboratoire du Professeur B. Edlen à Lund [6].

l'analyse spectrale d'émission à l'ultraviolet lointain, ainsi que nous le montrons par ailleurs [5], et doser certains éléments comme les métalloïdes dont la détection est délicate dans l'ultraviolet moyen.

Manuscrit reçu le 8 avril 1955.

[1] Vodar B. et Astoin N. — *Nature* 1950, **166**, 1029.
[2] Astoin N. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 2050.
[3] Astoin N. et Vodar B. — *J. Physique Rad.*, 1953, **14**, 494.
[4] Romand J., Balloffet G. et Vodar B. — *C. R. Acad. Sc.*, **240**, 1955, 412.
[5] Balloffet G., Romand J. — *J. Physique Rad.*, **16**, 490, 1955.
[6] Bockasten K. — *Ark., Fys.*, 1955, **9**, 457-481.

---

## UTILISATION DES ÉTINCELLES GLISSANTES POUR L'ANALYSE SPECTRALE DANS L'ULTRAVIOLET LOINTAIN. POSSIBILITÉ DE DÉTECTION ET DOSAGE DU SOUFRE, DU PHOSPHORE ET DU CARBONE DANS LES ACIERS

Par M^lle^ Germaine Balloffet
et M. Jacques Romand,
Laboratoire des Hautes Pressions, Bellevue.

Parmi les éléments qu'il est difficile de détecter avec les techniques habituelles de l'analyse spectrale nous remarquerons les halogènes, les gaz rares et les métalloïdes, dont les raies intenses sont dans l'ultraviolet lointain [1], [2], [3]. Jusqu'à présent, cette région spectrale n'était pas utilisée pour l'analyse par suite de difficultés expérimentales dont la principale provient du fonctionnement instable de l'étincelle dans le vide. On peut tourner cette difficulté en utilisant une étincelle ordinaire dans une atmosphère transparente (azote ou argon) avec une fenêtre (fluorine par exemple) entre l'étincelle et la fente [4]. Mais cette méthode présente des inconvénients : nécessité d'utiliser un gaz pur, pollution de la fenêtre, limitation en longueur d'onde.

Il nous a semblé intéressant d'examiner au point de vue de l'analyse spectrale les possibilités des étincelles glissantes dont le fonctionnement est plus stable que celui des étincelles dans le vide. Le premier problème que nous avons abordé est celui de la recherche du soufre, du phosphore et du carbone dans les aciers (1). Des essais de dosage de ces éléments avaient déjà été faits à l'aide de raies situées au voisinage de 2 000 Å. Le phosphore peut ainsi être dosé avec la raie 1774,94 Å ($P_I$) jusqu'à 0,005 pour 100 [4] et avec la raie 2136,19 Å ($P_I$) jusqu'à 0,01 pour 100 [6]; pour le soufre la raie 1807,37 Å ($S_I$) permet d'atteindre 0,002 pour 100 [4]; enfin la raie 2296,86 Å ($C_{III}$) permet de doser le carbone jusqu'à 0,06 pour 100 [7].

Mais toutes ces raies sont situées dans une région où le spectre du fer est très riche, le dosage est donc délicat et exige des appareils ayant un pouvoir de résolution élevé; au contraire le spectre du fer est relativement peu riche entre 1200 et 700 Å (avec nos conditions d'excitation), et dans cette région on observe, entre autres, le spectre du phosphore, du soufre et du carbone plusieurs fois ionisés.

Nous utilisons l'étincelle sous vide décrite par ailleurs [5]. Nous avons adopté la disposition 1 de cette référence avec un écartement des électrodes de 2,8 mm. La disposition 4 est également utilisable. Le générateur a souvent été décrit : 25 000 V, 0,75 μF, 14 μH, pilotage par un éclateur rotatif dans l'air monté en série, au rythme de 30 étincelles. mn. Rappelons que des précautions doivent être prises concernant le nettoyage des électrodes et du support, ainsi que le réglage de l'écartement [5]. Le spectrographe utilisé était muni d'un réseau en incidence normale de 570 traits/mm et 1 m de rayon donnant dans le premier ordre une dispersion de 17,8 Å/mm. Une pose de 80 s (40 étincelles) est suffisante.

Nous avons choisi des raies éloignées des raies du fer et nous avons retenu les raies : 950,669 et 1118,586 Å de $P_{IV}$ ; 933,382 et 944,517 Å de $S_{VI}$, ainsi que 977,026 et 1176 Å de $C_{III}$ (la « raie » 1176 Å comprend plusieurs composantes non résolues par notre appareil). Les raies que nous utilisons sont celles d'ions dont la couche externe ne contient qu'un électron ($S_{VI}$) ou deux électrons ($C_{III}$,$P_{IV}$ c'est-à-dire d'ions ayant une configuration de la couche périphérique analogue à celle des atomes alcalins ou alcinoterreux, et cette analogie est peut être la raison de la sensibilité de ces raies. Nous ne savons pas si cette sensibilité est supérieure à celle des raies habituellement considérées comme ultimes ($C_I$ : 1656,998 Å, $P_I$ : 1774,942 Å, $S_I$ : 1807,37 Å) et nous n'avons pas pu faire la comparaison, le spectre d'arc n'apparaissant pas dans notre source.

On emploie une technique classique de photométrie photographique par rapport à une raie de référence du fer prise dans la même région spectrale. Les concentrations limites détectables ont été évaluées à 0,005 pour 100 pour le soufre et le phosphore et 0,01 pour 100 pour le carbone. D'autre part, dans les conditions où nous opérons les écarts entre les points expérimentaux et la droite de dosage restent inférieurs à 20 pour 100 sur la concentration pour des teneurs de l'ordre de 0,05 pour 100; ces écarts, actuellement supérieurs aux limites d'erreur du dosage chimique, sont dus à plusieurs causes parmi lesquelles nous retiendrons : les erreurs locales sur les plaques sensibilisées, les mesures densitométriques sur des spectres de moins de 2 mm de hauteur, les difficultés de réglage optique, enfin la reproductibilité de la source. Il semble que l'utilisation de récepteurs photélectriques associés à des circuits intégrateurs permettrait d'éliminer en majeure partie ces difficultés.

Manuscrit reçu le 8 avril 1955.

[1] Harrison G. R. — *Metals and Alloys*, 1936, **7**, 290.
[2] Meggers W. F. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1941, **31**, 39.
[3] Mc Nally J. R., Harrison G. R. et RoweE., *J. Opt. Soc. Amer.*, 1947, **37**, 93.

(1) Nous sommes heureux de remercier M. l'Ingénieur militaire en chef Lœuille du Laboratoire Central de l'Armement pour l'intérêt qu'il a témoigné dès l'origine à ce travail, ainsi que M. Laurent de l'I. R. S. I. D. qui nous a obligeamment fourni des échantillons dosés.

[4] Bills K. M. — Communication au Congrès de Spectroscopie de Gmunden, 1954. *Spectrochimica Acta*, 1955 (à paraître).
[5] Romand J. et Balloffet G. — *J. Physique Rad.*, 1955, **16**, 489.
[6] Breckpot R. et Marzec K. — *Bull. Soc. Chim. belg.*, 1949, **58**, 280.
[7] Breckpot R. et Gobert C. — *Bull. Soc. Chim. belg.*, 1950, **59**, 102.

## SUR LA SÉPARATION DES SPECTRES D'ORDRES DIFFÉRENTS D'UN RÉSEAU EN INCIDENCE RASANTE DANS L'ULTRAVIOLET LOINTAIN

Par Mlle N. Astoin, MM. B. Vodar et J. Romand,
Laboratoire des Hautes Pressions, Bellevue.

Avec les réseaux habituellement utilisés en incidence rasante, on observe la superposition d'un grand nombre de spectres d'ordres parfois élevés. On sait que cette circonstance est favorable pour la détermination précise des courtes longueurs d'onde par la méthode des coïncidences [1], [2]; par contre, en spectrographie d'absorption, elle est extrêmement gênante : à cause de cette superposition on doit pratiquement renoncer à une source à spectre continu et l'on est forcé d'utiliser un spectre de raies, ce qui ne permet pas de résoudre les détails du spectre d'absorption. Par ailleurs un spectre riche en raies, nécessaire aux études d'absorption, est d'un dépouillement fastidieux lorsqu'il comporte plusieurs ordres d'interférence différents.

A propos de la séparation des ordres dans l'ultraviolet lointain, rappelons un travail récent [3] sur l'absorption du beryllium entre 60 et 250 Å à l'aide du continu émis par le synchrotron de Cornell, travail dans lequel on a utilisé un procédé basé uniquement sur le calcul. Cette méthode, extrêmement indirecte, ne peut évidemment pas entrer en compétition avec une séparation expérimentale efficace. Citons aussi pour mémoire, la méthode de diffraction par des fentes croisées avec la fente du spectrographe [4] : elle ne convient qu'à l'identification des ordres et des fantômes sur un spectre de raies de référence. On peut songer encore aux filtres par absorption de gaz (discontinuités de photoionisation) et même de solides (discontinuités d'absorption déjà employées dans les filtres classiques pour rayons X). Toutefois le choix des discontinuités est assez limité et l'emploi de tels filtres ne s'est pas encore répandu.

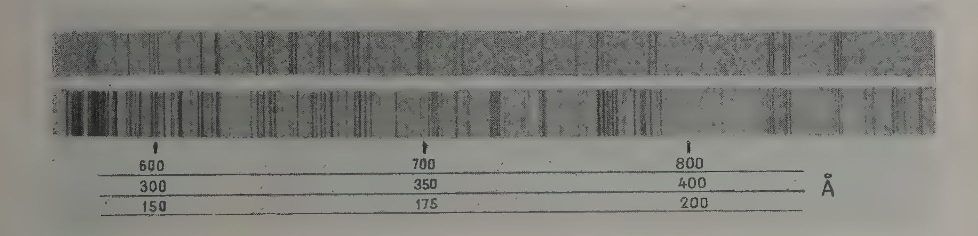



Fig. 1.

On sait que, dans l'ultraviolet lointain, les pouvoirs réflecteurs sous incidence normale sont faibles, mais qu'on observe un pouvoir réflecteur assez élevé sous forte incidence, correspondant à une sorte de réflexion totale avec un indice inférieur à 1. La conséquence de cet état de choses est que la limite spectrale de la lumière réfléchie décroît avec l'incidence ainsi qu'il a été montré par exemple par Edlen en observant les spectres donnés par un réseau sous diverses incidences. Cette circonstance peut être mise à profit pour éliminer les ordres supérieurs d'une partie au moins du spectre. Les nécessités du réglage, très délicat, d'un réseau sous forte incidence, ne permettent pas de faire varier facilement l'incidence sur le réseau, mais on peut atteindre le résultat cherché en introduisant une réflexion supplémentaire sur un miroir auxiliaire d'inclinaison variable qui, dans l'échelle des fréquences, fonctionnera comme un filtre passe-bas; la longueur d'onde limite dépend théoriquement non seulement de l'incidence, mais aussi de la nature du miroir [5] ; il se peut donc qu'on puisse modifier cette limite, simplement par changement du miroir. Si le miroir utilisé, ou deux miroirs parallèles ne changeant pas l'orientation du faisceau, sont placés avant la fente, il n'y aura aucune perturbation du réglage du spectrographe. Le dispositif, objet de nos essais, ne comprend précisément qu'un seul miroir aluminié, réglable dans deux directions qui renvoie sur la fente la lumière de la source, reçue sous une incidence de 30 à 45°. La limite inférieure du spectre pour 30° est vers 400 Å pour 45° la région au-dessous de 290 Å n'est plus observable, et celle entre 290 et 400 Å est considérablement affaiblie.

La reproduction ci-contre montre, juxtaposées, deux mêmes portions du spectre d'une étincelle glissante du fer, pris avec et sans miroir auxiliaire sous 45°. La suppression totale des raies du quatrième ordre et l'affaiblissement de celles du second nous a grandement facilité le dépouillement de ce spectre.

Les dimensions de la chambre à étincelles actuelle, la nécessité d'éclairer toute la surface du réseau, obligent à utiliser un miroir plan et à le placer au voisinage de l'étincelle, ce qui entraîne son salissement rapide. A cause de ces conditions défavorables le

temps de pose avec miroir est de 1 h contre 15 mn sans miroir pour les spectres de la figure. L'affaiblissement à 290 Å, juste au seuil de la région très fortement affaiblie, est environ quatre fois plus grand qu'à 550 Å et six fois plus qu'à 800 Å, tandis qu'à 280 Å il est déjà au moins cinq fois plus élevé qu'à 290 Å. Le manque de données sur les pouvoirs réflecteurs en incidence oblique ne permet pas de préciser la valeur absolue de cet affaiblissement ni de séparer les pertes dues à la réflexion supplémentaire de celles dues au changement de la géométrie du montage (source éloignée de la fente).

Pour pallier l'inconvénient du salissement et gagner en même temps de la lumière nous envisageons, avec une nouvelle chambre, de remplacer le miroir plan par un miroir concave ou torique de distance focale suffisante.

Manuscrit reçu le 15 avril 1955.


[1] Edlen B. — *Thèse*, Uppsala, 1934, p. 15.
[2] Boyce J. C. et Robinson H. A. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1936, **26**, 133.
[3] Johnston R. W. et Tomboulian D. H. — *Phys. Rev.*, 1954, **94**, 1585-1589.
[4] Pomerance H. S. et Beutler H. G. — *Rev. Modern Phys.*, 1942, **14**, 66.
[5] Sawyer R. A. — Experimental Spectroscopy, Prentice Hall (New-York), 1951, p. 311.


---

## REPÉRAGE A DISTANCE DE PETITS DÉPLACEMENTS DANS UN MILIEU SOUMIS A UNE PRESSION HYDROSTATIQUE ÉLEVÉE


Par MM. B. Galperin, J. Saurel, A. Lecocq et B. Vodar,

Laboratoire des Hautes Pressions, Bellevue.


Nous avons étudié le repérage du passage, dans une zone de quelques dixièmes de millimètres, de l'extrémité supérieure d'une colonne de mercure se déplaçant, à vitesse variable, dans un tube capillaire non métallique, situé dans une enceinte contenant un gaz fortement comprimé. Ce problème se posait pour l'étude des équations d'état des gaz comprimés par une méthode à volume constant [1] dérivée de la méthode isotherme d'Amagat.

Le repérage par visée n'est pas possible ici. L'emploi de contacts électriques scellés dans la paroi du capillaire est peu satisfaisant, car il limite le choix du matériau constituant le capillaire et rend en particulier très difficile l'emploi de capillaires en oxydes très réfractaires; en outre la différence de compressibilité entre le métal et le verre rend très fragiles ces soudures aux pressions élevées [2], [3], [4]. Dans les procédés classiques de repérage « à distance » par variation de self ou de capacité, où intervient la capacité totale, les variations avec la pression des capacités « parasites » des conducteurs, sondes de mesure, et passages de courant étanches, conduisent à retoucher le réglage des appareils au cours des changements de pression, précisément au moment où il est nécessaire de repérer le mouvement du mercure sans ambiguïté.

Les résultats les plus intéressants ont été donnés par le dispositif suivant. La colonne de mercure est portée à une tension alternative; elle est entourée d'un blindage (dépôt métallique sur la paroi externe du capillaire) relié à la masse. Dès que le bout de la colonne dépasse l'extrémité de ce blindage, un signal est perçu par une électrode également formée d'un dépôt métallique. La colonne est reliée à un générateur très stable, composé d'un étage oscillateur, d'une séparatrice, et d'une cathodyne de sortie, et délivrant une tension de 3 V à 455 kHz aux bornes d'une impédance de 1000 Ω. Le récepteur est composé d'un amplificateur sélectif à deux étages accordés sur 455 kHz, d'une détectrice, et d'un indicateur de sortie (microampèremètre 100 μA). Le gain du récepteur est de 40 000 environ et sa bande passante est assez large pour admettre éventuellement une légère dérive de la fréquence du générateur.

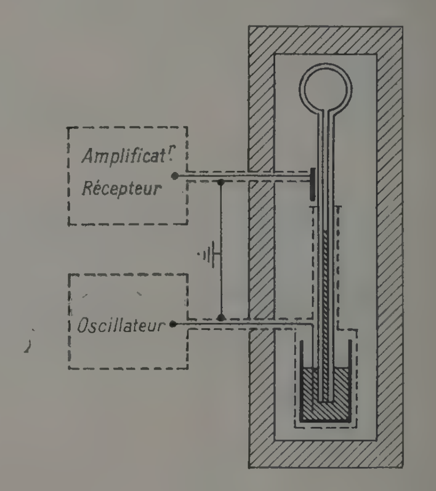



Fig. 1.

Au cours d'essais à pression atmosphérique, l'introduction en parallèle sur la colonne émettrice et l'électrode réceptrice de capacités très supérieures aux variations, avec la pression, des capacités « parasites » et l'immersion de la sonde dans des fluides de densités et de constantes diélectriques très diverses, n'ont pas amené de modifications sensibles de la courbe de repérage. Pour l'ensemble de ces essais, la précision de repérage a été de l'ordre de 0,2 mm dans un capillaire de diamètre 0,5 mm, alors que, dans un milieu donné (air à pression atmosphérique par exemple) la précision a été de 0,05 mm (limite de précision des mesures effectuées).

La figure 2 donne un exemple de courbe de repérage. L'approche et l'éloignement de l'extrémité de la colonne de mercure correspondent aux parties arrondies de la courbe; le passage à la sortie du blindage correspond à la partie sensiblement rectiligne, et de forte pente (40 μA pour 1 mm). En fonction des diamètres intérieurs des capillaires qu'on a fait

varier de 0,5 à 0,06 mm, la forme de la courbe n'est pas sensiblement modifiée, mais il est nécessaire d'étalonner chaque capillaire si l'on désire interpoler dans la région de grande sensibilité. Les essais sous pression ont été effectués jusqu'à 1000 atm, en étudiant la compressibilité de l'azote à la température constante de 20° C et en calculant les déplacements de la colonne de mercure d'après les Tables de compressibilité. Ces essais confirment les résultats obtenus à pression atmosphérique. Les formes des courbes de repérage ne sont pas sensiblement modifiées par les variations de pression.

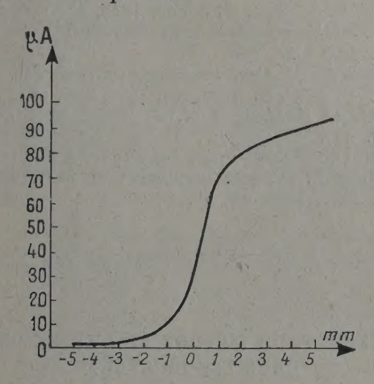



Fig. 2.

Le dispositif décrit ne comprend ni tarage, ni réglage préalable. Ses indications, au cas d'une légère dérive des appareils électroniques peuvent être contrôlées par connection, à pression atmosphérique, de sondes de référence. Le temps de réponse est très inférieur à la seconde, et la tension délivrée est facilement amplifiable et enregistrable. Ce dispositif, convient plus généralement dans tous les cas où il est nécessaire de repérer sous pression, les déplacements de colonnes de fluides ou de tiges électriquement conductrices (par exemple, mesure de compressibilité des solides, des liquides, ou mesures des niveaux de mercure dans les manomètres absolus).

Manuscrit reçu le 26 mars 1955.

[1] Saurel J. — *J. Physique Rad.*, 1953, **14**, 215.
[2] Lazarre F. — Com. pers. à paraître *J. Rech. C. N. R. S.*, Bellevue.
[3] Kritchevskii et Tsiklis. — *Dokl. Acad. Sc. U. R. S. S.*, 1951, **78**, n° 6, 1169.
[4] Basset J. et J. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 50 A.

---

## RÈGLES DE SÉLECTION POUR LA DIFFUSION RAMAN ; CAS DE LA CALCITE

Par O. Theimer,
University of British Columbia, Vancouver, Canada.

Il semble être bien établi par le travail expérimental de divers auteurs [1], [2], [3], [4], que dans le cas de la calcite, quelques unes des composantes de la polarisabilité du premier ordre qui devraient être nulles étant données les règles de sélection pour les vibrations fondamentales du réseau (vecteur de propagation $q_j = 0$), ont en réalité une valeur finie de sorte que les composantes interdites et les composantes permises sont du même ordre de grandeur. De plus, on trouve que la grandeur des composantes interdites du tenseur dépend fortement de la direction des vecteurs de propagation $Q'$ et $Q''$ des lumières incidente et diffusée. Jusqu'ici ce comportement imprévu de cristaux tels que la calcite n'a pas été expliqué de façon complète. En principe, la violation des règles de sélection, dans le cas qui nous occupe, peut être interprétée comme la conséquence de divers effets non linéaires (anharmoniques) de grandeur exceptionnelle. Puisque l'anisotropie des composantes du tenseur ne peut être comprise à partir de cette hypothèse, nous présentons ici une explication différente.

Il est bien connu que les vibrations du réseau qui sont actives en effet Raman ne sont pas les vibrations fondamentales, mais des vibrations avec vecteur de propagation $q_j = Q'' — Q' = — Q$. Cependant, on suppose généralement que pour les vibrations internes caractéristiques, telle que la vibration totalement symétrique ($\nu^* = 1088 \text{ cm}^{-1}$) de la calcite, il n'existe presque pas de différence entre les fondamentales et les ondes très longues ($Q \to 0$). En ce qui concerne l'intensité des raies du spectre Raman, cette hypothèse implique que la polarisabilité totale du cristal peut être représentée par la somme des contributions de petits éléments de volume pratiquement indépendants les uns des autres. En termes de la théorie de Born [5], [6] sela signifie que la polarisabilité d'un atome dans un cristal dépend seulement de la position des atomes qui lui sont immédiatement voisins, et, conséquemment, les ondes très longues ($Q \to 0$) et les fondamentales du type 1088 de la calcite devraient être équivalentes, puisqu'elles produisent les mêmes distorsions locales dans le cristal. D'où il suit que dans ce cas, les règles de sélection pour les fondamentales devraient s'appliquer pour les raies de Raman. Puisqu'elles ne sont pas valables, nous supposons que le concept d'éléments de volume indépendants dans un cristal n'est pas fondé en général, du moins en ce qui concerne la polarisabilité des cristaux.

Dans le but d'introduire dans la théorie de l'effet Raman les interactions entre des atomes non voisins, nous distinguons entre les électrons situés sur des orbitales localisées, atomiques ou moléculaires, et les électrons situés sur des orbitales non localisées s'étendant sur tous les atomes du cristal. Les derniers peuvent être représentés par des ondes planes avec vitesse de groupe $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\left(\dfrac{h}{\lambda}\right)}$ différente de zéro. Nous supposons en plus que les fréquences $\nu'$ et $\nu''$ des lumières excitatrices et diffusées ont une valeur très différente de toutes les valeurs caractéristiques des fréquences de résonance $\nu_{r}^{k}$, du cristal en question. On obtient, à partir de la théorie de la radiation de Dirac, l'expression suivante pour la polarisabilité totale du cristal

($\rho, \sigma = 1, 2, 3,$) :

$$[\alpha_{\rho\sigma}]^{v_j}_{v_j+1} = \frac{1}{4\pi\nu'\nu''h}\Bigg[\sum_{l'}\left\{\int e^{2\pi i Q.r}\left(\frac{\rho^2}{m^2}\right)^{l'}_{l'} dv\right\}\delta_{\rho\sigma} - 2\sum_{l'}\sum_{l'''}\left\{\frac{\nu^{l'}_{l'''}}{(\nu^{l'}_{l'''})^2-(\nu')^2} \times \int e^{2\pi i Q'.r}(\rho v_\sigma)^{l'}_{l'''} dv \times \int e^{-2\pi i Q''.r}(\rho v_\rho)^{l'''}_{l'} dv\right\}\Bigg]^{v_j}_{v_j+1}. \quad (1)$$

$v_j$ est le nombre quantique de vibration du niveau initial. Les indices $l'$ et $l'''$ correspondent aux orbitales électroniques occupées, dans les états initial et intermédiaire. $\rho$ et $\rho v$ sont les densités de charge et de courant. C'est seulement quand les orbitales électroniques sont localisées qu'on peut écrire l'équation (1) sous sa forme conventionnelle [6]

$$\left.\begin{array}{c}[\alpha_{\rho\sigma}]^{v_j}_{v_j+1} = \sum_n e^{2\pi i Q.r(n)}[\alpha_{\rho\sigma}(n)]^{v_j}_{v_j+1} \\ \left[\begin{array}{l}\alpha_{\rho\sigma}(n), \text{ polarisabilité de l'atome } (n) \\ \qquad \text{avec vecteur de position } r(n)\end{array}\right],\end{array}\right\} \quad (2)$$

montrant que $[\alpha_{\rho\sigma}]^{v_j}_{v_j+1}$ devient asymptotiquement indépendant de $Q$ pour des ondes très longues du type des vibrations internes caractéristiques. Les règles de sélection pour les fondamentales sont alors valables pour les vibrations actives en effet Raman où $q_j = -Q$.

La situation est différente dans le cas d'électrons situés sur des orbitales non localisées, comme le montre l'équation (1). Dans ce cas, $[\alpha_{\rho\sigma}]^{v_j}_{v_j+1}$ est nul à moins qu'une des deux paires de conditions (*a*) et (*b*) soit satisfaite :

$$\left.\begin{array}{lll}(a) & Q' + q_l = 0, & Q'' + q_l + q_j = 0. \\ (b) & Q' + q_l + q_j = 0, & Q'' + q_l = 0.\end{array}\right\} \quad (3)$$

$q_l = q_{l'''} - q_{l'}$, $q_{l'''}$, $q_{l'}$ sont des vecteurs de propagation d'orbitales électroniques non localisées. Les équations (3) contiennent la loi de la conservation de la quantité de mouvement, $q_j = -Q$, et aussi une règle de sélection pour les orbitales électroniques, de sorte que la somme de l'équation (1) contient seulement les termes ou $q_l = -Q'$ et $q_l = -Q''$. Cela signifie que pour des directions différentes des lumières incidente et diffusée, différentes orbitales non localisées contribuent à la polarisabilité du cristal. Une forte anisotropie des composantes du tenseur de polarisabilité peut résulter de cette situation, même si $|Q|$ tend vers zéro. Cette anisotropie des ondes longues implique aussi une différence entre les fondamentales et les ondes longues et demande de nouvelles règles de sélection propres à ces dernières. Ces règles de sélection ne correspondent pas au groupe cristallographique complet du cristal, mais seulement au groupe des opérations de symétrie qui laissent $q_j$ invariant (groupe de $q_j$). Les ondes longues avec vecteur de propagation $q_j$ se transforment comme les représentations du groupe de $q_j$ que Wigner appelle « small representations » du groupe d'espace du cristal [7]. Les règles de sélection qui correspondent à ces représentations sont facilement obtenues par les méthodes usuelles, et l'on peut montrer qu'elles sont compatibles avec les propriétés connues de la calcite et de quelques autres cristaux qui présentent des lignes anormales dans leur spectre Raman du premier ordre.

Une publication plus détaillée de ce travail suivra.

Manuscrit reçu le 29 mars 1955.

[1] Michalke H. — *Z. Physik*, 1938, **108**, 748.
[2] Couture L. — *Ann. Physique*, 1947, **2**, 5; 1948, **3**, 520. Couture-Mathieu M^me L. et Mathieu J. P. — *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **236**, 1868.
[3] Fruhling A. — *Ann. Physique*, 1951, **6**, 401.
[4] Aynard R. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 2352.
[5] Born M. et Bradburn M. — *Proc. Roy. Soc.*, 1947, A **89**, 277.
[6] Theimer O. — *Proc. Phys. Soc.*, 1951, A **64**, 102.
[7] Bouckaert L. P., Smoluchowsky R. et Wigner E. — *Phys. Rev.*, 1936, **50**, 58.

---

## UN ARTIFICE POUR L'ÉTUDE DE L'EFFET COMPTON DANS LES CRISTAUX

Par H. Curien,
Laboratoire de Minéralogie et Cristallographie,
Faculté des Sciences, Paris.

Si l'on fait tomber sur un cristal un faisceau de rayons X monochromatique, il rejette des radiations diffusées de différentes longueurs d'onde. Outre les radiations de fluorescence qu'il est facile d'éliminer, car elles ont une longueur d'onde plus faible et, en général, bien différente de la longueur d'onde incidente, les faisceaux diffusés contiennent des photons qui ont échangé de l'énergie avec les ondes d'agitation thermique et des photons qui ont perdu de l'énergie par choc avec des électrons (effet Compton).

L'étude expérimentale des photons du premier type permet la détermination des ondes d'agitation thermique dans un cristal et le calcul des forces de rappel interatomiques [1], [2]. Les photons du deuxième type (effet Compton) n'ont pas été étudié expérimentalement de façon détaillée et complète. Toutefois, Laval [3] a montré que les approximations généralement utilisées étaient certainement défectueuses dans le milieu cristallin, d'où l'intérêt d'une étude expérimentale.

Jusqu'à présent, les méthodes expérimentales utilisées pour la mesure des faisceaux de rayons X diffusés (spectromètre à chambre d'ionisation ou compteur Geiger-Muller) conduisent à une mesure *globale* du flux diffusé dans une direction. Le but de la présente Note est d'indiquer un artifice qui permet de séparer diffusion thermique et diffusion Compton et d'obtenir ainsi simultanément, et sans hypothèse sur l'un ou l'autre effet, des renseignements exacts sur les deux.

A la diffusion par agitation thermique, correspondent des photons qui ont échangé de l'énergie avec

des photons. L'énergie moyenne de ces photons à température ordinaire est de $KT = 0{,}025$ eV. L'énergie d'un photon incident est de l'ordre d'une dizaine de kiloélectrons-volts (8 keV pour Cu $K\alpha$, 17 keV pour Mo $K\alpha$). Comme cette énergie est considérable devant $KT$, le changement de longueur d'onde des photons est extrêmement faible (de l'ordre de $10^{-5}$ en valeur relative). La variation de longueur d'onde $\Delta\lambda$ est beaucoup plus importante pour l'effet Compton :

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi),$$

$\varphi$ étant l'angle de la radiation incidente avec la radiation diffusée et $\frac{h}{mc} = 0{,}024$ Å. On pourrait donc en principe faire une analyse spectrale du rayonnement diffusé, à l'aide d'un monocristal analyseur. Mais les flux diffusés sont déjà faibles. La perte considérable consécutive à ce mode d'analyse rend cette méthode impraticable.

TABLEAU.

| | |
|---|---|
| Anticathode : Rh. | Filtre : Mo. |
| Raie $K\alpha_2$. | Arête : $K$. |
| $\lambda_0 = 616{,}37$ | $\lambda_A = 618{,}52$ |
| $\mu_0 = 91{,}6$ | $\mu_{A+} = 13{,}4$ |
| $\varphi_m = 24^0$ | |
| Anticathode : W. | Filtre : Ni. |
| Raie $L\alpha_2$. | Arête : $K$. |
| $\lambda_0 = 1484{,}42$ | $\lambda_A = 1485{,}02$ UX |
| $\mu_0 = 380$ | $\mu_{A+} = 46$ |
| $\varphi_m = 13^0$ | |

Imaginons que la radiation monochromatique incidente ait une longueur $\lambda_0$ de très peu inférieure à une longueur d'onde critique d'absorption $\lambda_A$ d'un élément A. Un filtre contenant l'élément A, placé sur le trajet des rayons diffusés, absorbera très fortement les radiations de longueurs d'onde $\lambda_0$ (agitation thermique) et restera transparent pour les radiations diffusées par effet Compton à condition que $\Delta\lambda > \lambda_A - \lambda_0$. On pourra ainsi, en opérant avec et sans filtre, séparer les deux contributions à la diffusion.

Pratiquement, les couples d'éléments émetteurs (anticathode) et absorbant (filtre) possibles sont donnés dans le tableau ci-dessus avec leurs coefficients d'absorption massique $\mu_0$ pour $\lambda_0$ et $\mu_{A+}$ au pied de l'arête d'absorption. On donne également les angles $\varphi_m$ minima à partir desquels a lieu la séparation correspondant à $\Delta\lambda = \lambda_A - \lambda_0$.

Sur ce principe, nous avons entrepris l'étude de l'effet Compton dans le fer et dans l'aluminium.

Manuscrit reçu le 31 mars 1955.

[1] LAVAL J. — *Bull. Soc. Franç. Minér. Cristallogr.*, 1941, **64**, 1.
[2] CURIEN H. — *Bull. Soc. Franç. Minér. Cristallogr.*, 1952, **75**, 197 et 343.
[3] LAVAL J. — Rayons X et Structure atomique, Collège de France, 1948.

## INFORMATION.

Une discussion générale sur la Chimie physique des enzymes, organisée par la Faraday Society, se tiendra les 10, 11 et 12 août 1955 au Laboratoire de Physiologie de l'Université, Parks Road, à Oxford, sous la présidence du Professeur R. G. W. Norrish, F. R. S. Pour les renseignements et inscriptions, s'adresser le plus tôt possible (clôture le 2 août 1955) à The assistant secretary, Faraday Society, 6, Gray's Inn Square, London, W. C. 1.

## REVUE DES LIVRES

BIDARD (R.), **Thermopropulsion des avions, turbines et compresseurs axiaux** (1 vol. 21 × 27 cm, 338 pages, Gauthier-Villars, Paris, 1954, 3 900 f).

Cet Ouvrage est la deuxième édition du cours développé par René Bidard à l'École Supérieure d'Aéronautique, depuis 1946.

Cet important travail traite essentiellement de la « propulsion par réaction directe » et des moyens de l'obtenir par des procédés thermiques; cependant les thermomachines entraînant des hélices sont également étudiées.

Après avoir clairement classé et défini les différents types de propulsion, l'auteur étudie de manière très physique et sans ménager les exemples et les applications numériques, la thermodynamique et les cycles théoriques et pratiques des différents réacteurs.

Les chapitres suivants sont consacrés à l'étude générale des grilles d'aubes, des compresseurs et plus particulièrement des compresseurs axiaux; puis vient la théorie générale des écoulements à trois dimensions dans les turbomachines, l'étude des turbines axiales et de la combustion dans les turbomachines d'aviation.

Cette deuxième édition complète l'édition de 1948 essentiellement sur les points suivants : on y trouve un calcul complet d'un cycle de turboréacteur, ainsi qu'une étude de l'aérodynamique externe des réacteurs qui met en lumière les relations qui existent entre le fonctionnement interne et le comportement aérodynamique à l'extérieur de la carène.

L'étude des grilles d'aubes a été complétée par d'importants développements sur les formes de profil, la prédétermination des caractéristiques de grilles, l'influence du nombre de Mach, etc.

Le chapitre de la combustion a été augmenté d'une étude de la combustion dans les fluides à grandes vitesses telle qu'elle se présente dans les chambres de post-combustion.

Enfin l'auteur a inclu en fin de volume un chapitre complet sur les échangeurs de chaleur et leur calcul.

Enfin l'Ouvrage est suivi d'une liste de près de 150 références bibliographiques.

Il reste à regretter qu'un Ouvrage de cet intérêt et de ces dimensions, soit présenté broché et soit de ce fait fragile et d'un maniement délicat.

S. PAUTHIER.

JAOUL (B.), **Contribution à l'étude de la déformation plastique** (1 vol. 18 × 27 cm, 86 pages, Ministère de l'Air, Paris, 1954, 800 f).

Par une étude précise des courbes de traction de l'aluminium et de ses alliages, l'auteur sépare trois domaines :

1° Domaine de proportionnalité élastique.

2° Premier domaine de plasticité où la tension et l'allongement sont liés par

$$\sigma = \sigma_0 + A\varepsilon^m \qquad (m > 0{,}5).$$

3° Deuxième domaine de plasticité :

$$\sigma = \sigma'_0 + B\varepsilon^n \qquad (\sigma'_0 < 0;\ n \neq 0).$$

Ceci met donc en évidence dans le domaine plastique un point de transition qui pour un métal pur ou faiblement allié serait indépendant des traitements thermiques et des conditions d'essais.

On peut relier la position de ce point de transition à divers phénomènes : c'est l'allongement nécessaire pour que le métal puisse recristalliser par recuit; c'est l'allongement critique à partir duquel les lignes de glissement peuvent changer de plan. Enfin les diagrammes de rayons X montrent une discontinuité d'allure à partir de ce point.

L'auteur en conclut que « le passage au point de transition » conduit à une modification de structure qui semble être une fragmentation des grains du métal et à une réorganisation des tensions internes entraînant une polygonisation du métal.

S. PAUTHIER.

GUILLIEN (R.), **Électronique** (2 vol. 14 × 19 cm, t. I : 336 pages, t. II : 306 pages, Presses universitaires, Paris, 2 000 et 1 800 f).

Cet Ouvrage comble un vide dans la littérature technique française : bien des ingénieurs et des chercheurs non électroniciens ont désiré se perfectionner dans leurs connaissances sur les tubes à vides et leurs circuits et n'ont eu à leur disposition que des Ouvrages étrangers. Bien des électroniciens ont également souhaité pouvoir retrouver dans un livre, classées et ordonnées, les diverses connaissances qu'ils ont acquises au cours de leur carrière. Le livre de M. Guillien est à la fois assez simple pour ne pas rebuter le non spécialiste et assez complet pour être un bon outil pour le spécialiste.

Le tome I est consacré aux tubes électroniques et aux amplificateurs : Rappel de notions d'électricité, tubes à vide, amplificateurs (basse fréquence, spéciaux, haute fréquence, amplificateurs de puissance). Le tome II traite des oscillations (basse et haute fréquences, hyperfréquences, amplificateurs de relaxation), de la modulation, de la détection, des tubes à gaz, des cellules photoélectriques, des compteurs. Le seul défaut de ces volumes, défaut inévitable pour un tel titre, est que les paragraphes traitant des applications de l'électronique (spectroscopie hertzienne, comptage des particules, ondes courtes, etc.) soient très réduits et ne fassent qu'effleurer les sujets qu'ils traitent; l'auteur y pallie par de nombreuses références bibliographiques.

J. COMBRISSON.

MARTIN (C. N.), **Tables numériques de Physique nucléaire** (1 vol. 16 × 25 cm, 260 pages, Gauthier-Villars, Paris, 1954, 1800 f broché).

Cet Ouvrage très bien présenté représente un gros travail de la part de son auteur. Il s'adresse au technicien averti, au physicien et même à l'étudiant qui aborde des problèmes de Physique nucléaire. Les tables données par l'auteur sont : Valeurs numériques des masses des atomes, $A$ fonction de $Z$ (de $A = 10$ à 280); Valeur des masses des atomes, $Z$ fonction de $A$ (de $Z = 1$ à 115); Énergie de transition $\beta$ en mégaélectrons-volts ($Z = 2$ à 115, $A = 10$ à 280); Énergie de transition $\alpha$ en mégaélectrons-volts ($Z = 16$ à 115, $A = 40$ à 280); Énergies de liaison, énergies de réactions nucléaires ($A = 10$ à 280, $Z = 3$ à 111); Importance relative des termes de la formule de Weizsäcker; Rayons nucléaires; Facteur $\frac{A}{A - a}$ pour calcul des seuils; Table de multiplication pour seuils et reculs; Énergie totale et énergie cinétique de désintégration $\alpha$; Facteur : arc cos $\sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}}$; Passage d'une particule électrisée à travers une barrière d'énergie potentielle; Hauteur de barrière d'énergie potentielle coulombienne; Section géométrique des noyaux; Table de conversion des $m$ U. M. N. en mégaélectrons-volts; Masses expérimentales des atomes $\beta$ stables légers; constantes atomiques.

J. COMBRISSON.

INGERSOLL (L. R.), MARTIN (M. J.) et ROUSE (T. A.), **Un manuel de Laboratoire de Physique expérimentale (A laboratory manual of experiments in Physics)** (1 vol. 15 × 23 cm, 286 pages, McGraw-Hill Book Company, New York, 1953).

Cet Ouvrage est un recueil des manipulations de Mécanique et de Physique générales, destiné aux étudiants de l'Université du Wisconsin. Bien que certaines manipulations concernent l'utilisation d'appareils spéciaux et que la rédaction comporte surtout des conseils aux étudiants, il pourra rendre service aux chefs de travaux et professeurs.

Chaque manipulation comprend :

1° un rappel de la théorie et des formules utiles;

2° la description de l'appareil employé, avec figures et schémas clairs;

3° la marche à suivre très détaillée, des conseils pratiques, les mesures à effectuer, la disposition des calculs, les courbes à construire, etc.;

4° quelques questions et problèmes.

En raison de la variété des sujets, le niveau d'études correspondant à ces travaux pratiques est assez variable, en général inférieur à celui des certificats de licence de nos Universités; l'esprit pratique de l'enseignement américain s'y manifeste. La mécanique donne lieu à 27 manipulations, la chaleur à 11, l'électricité et le magnétisme à 24, l'acoustique à 6, l'optique à 12. Quelques manipulations de physique corpusculaire exigent des appareils bien spéciaux qui ne sont pas décrits. L'optique physique est à peine représentée.

L'Ouvrage débute par des considérations et conseils au sujet des erreurs, des calculs de moyenne et des graphiques.

Il se termine par la description de quelques appareils d'usage courant, et par des tables numériques classiques.

BERTRAND.

**Nouvelles techniques de recherche en Physique (New Research techniques in Physics)**, Symposium organisé par l'Académie des Sciences du Brésil et le Centre de Coopération scientifique pour l'Amérique latine (juillet 1952) (1 vol. 19 × 27 cm, 447 pages, Rio de Janeiro, 1954).

Soixante-cinq Communications sont réunies dans ce volume. Il n'est pas possible dans le cadre de ce compte rendu d'en donner un extrait, ni même la liste. Les sujets traités sont principalement : la physique des rayons cosmiques, les constructions et propriétés de compteurs, des résultats de physique nucléaire et d'électromagnétisme.

J. COMBRISSON.

*Le Gérant :* MAURICE BLONDIN. 146995 IMP. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1955.